

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:

Директор



А. В. Замятин

«15» \_\_\_\_\_ 20 23 г.

Рабочая программа дисциплины

**Математический анализ**

по направлению подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) подготовки :

**Прикладная математика и инженерия цифровых проектов**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Бакалавр**


Год приема

**2023**

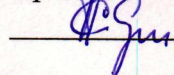
Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.02.01

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

 Д.Д. Даммер

Председатель УМК

 С.П. Сущенко

Томск – 2023

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4 Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2 Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3 Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4 Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Сформировать систему математических знаний, позволяющих понимать связанные теоретические и прикладные дисциплины.

– Научиться применять аппарат математического анализа для построения математических моделей при решении практических задач в различных профессиональных областях.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы. Дисциплина входит в модуль «Математика».

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Первый семестр, зачет

Первый семестр, экзамен

Второй семестр, зачет

Второй семестр, экзамен

Третий семестр, зачет

Третий семестр, экзамен

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 20 з.е., 720 часов, из которых:  
-лекции: 188 ч.

-практические занятия: 188 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

### **Тема 1. Теория вещественных чисел.**

Вводится обобщающее понятие вещественного числа.

Определяются правила сравнения, суммирования и умножения вещественных чисел как обобщение соответствующих правил для рациональных чисел.

Вводится понятие числового множества и его мощности.

Вводится понятие точных граней числового множества.

### **Тема 2. Предел. Непрерывность.**

Вводится понятие функции.

Дается определение и свойства предела последовательности как частного случая функции.

В обобщение предела последовательности вводится понятие предела функции. На его основе рассматривается понятие непрерывности функции.

Излагается теория бесконечно малых и бесконечно больших величин.

Выводятся замечательные пределы для последовательностей и функций.

Изучаются свойства элементарных функций.

### **Тема 3. Производная и ее применение.**

Дается определение и геометрический смысл производной.

Доказывается таблица производных.

Рассматриваются теоремы о функциях, имеющих производную.

Вводится понятие производных высших порядков и их свойства.

Дается определение дифференциала и дифференцируемости функции.

Вводится понятие дифференциалов высших порядков.

Вводится понятие дифференциалов сложных функций.

Выводится формула Тейлора.

Доказывается правило Лопиталю раскрытия неопределенностей.

Рассматривается исследование функции на монотонность и экстремум.

Дается определение выпуклости и точек перегиба графика функции.

Вводится понятие асимптоты графика функции.

Приводится схема исследования функции и построения эскиза графика.

### **Тема 4. Неопределенный интеграл**

Дается понятие первообразной и неопределенного интеграла.

Рассматриваются таблица интегралов и основные методы интегрирования.

Приводятся методы интегрирования рациональных дробей, иррациональных и тригонометрических функций.

### **Тема 5. Определенный интеграл.**

Вводится понятие интегральной суммы и определенного интеграла.

Рассматриваются суммы Дарбу и признак существования определенного интеграла.

Доказываются свойства интегрируемых функций и определенного интеграла.

Выводится формула Ньютона-Лейбница. Дается понятие определенного интеграла как функции верхнего предела интегрирования, доказываются теоремы о среднем.

Приводятся геометрические приложения определенного интеграла: вычисление длин дуг плоских кривых, площадей плоских фигур, объемов, площадей поверхностей вращения.

#### **Тема 6. Несобственные интегралы.**

Дается определение и доказываются свойства несобственного интеграла 1 рода.

Рассматриваются признаки сходимости несобственных интегралов 1 рода. Лемма Бореля.

Дается определение особых точек функции и несобственного интеграла 2 рода.

Вводится понятие главных значений несобственных интегралов.

Исследуются интегралы Фруллани.

#### **Тема 7. Функции многих переменных.**

Основные определения. Предел и непрерывность функции многих переменных.

Двойные и повторные пределы.

Производные и дифференциал функции многих переменных.

Неявные функции одной и многих переменных: существование и дифференцируемость

Система неявных функций.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Формула Тейлора.

Экстремум функции многих переменных.

Метод неопределенных множителей Лагранжа решения задачи на условный экстремум функции многих переменных.

#### **Тема 8. Числовые ряды.**

Основные определения.

Свойства рядов.

Признаки сходимости рядов.

Сочетательное свойство сходящихся рядов.

Переместительное свойство рядов и теорема Римана.

Умножение рядов.

#### **Тема 9. Криволинейные интегралы.**

Определение и вычисление криволинейных интегралов 1 и 2 рода.

Критерий независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути.

Интегралы по простым контурам.

#### **Тема 10. Функциональные и степенные ряды.**

Определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.

Признаки равномерной сходимости рядов.

Свойства равномерно сходящихся рядов.

Изучение учебного материала

Степенные ряды и радиус их сходимости.

Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Асимптотические ряды.

Ряды Фурье.

#### **Тема 11. Интегралы, зависящие от параметра.**

Основные определения.

Предельный переход под знаком интеграла, зависящего от параметра.

Дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла, зависящего от параметра.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра и признаки их сходимости.

Эйлеровы интегралы.

Преобразование Лапласа и его свойства.

## **Тема 12. Кратные и поверхностные интегралы**

Двойные интегралы: определение, свойства, вычисление.

Замена переменных в двойном интеграле.

Площадь поверхности.

Поверхностные интегралы 1 и 2 рода.

Тройные интегралы: определение и вычисление.

Многokратные интегралы. Замена переменных в многokратных интегралах.

## **9. Текущий контроль по дисциплине**

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, коллоквиумов по лекционному материалу, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

## **10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации**

Зачет в первом семестре проводится в письменной форме в виде самостоятельной работы по последнему разделу материала первого семестра. Продолжительность зачета 1,5 часа. Самостоятельная работа состоит из пяти задач, проверяющих ИОПК-1.2, ИОПК-1.4, ИОПК-3.2 и ИОПК 3.4.

Примеры задач.

1. °Найти  $y'$  производную функции, заданной явно:

$$y = \ln^5(\sin(4x)) \cdot \sqrt[3]{4 - 5x - x^2}$$

2. °Найти  $y'$  производную функции, заданной неявно:

$$e^y \cdot (x^5 + y^3) = 7x$$

3. °Найти  $dy$  дифференциал функции:

$$y = \frac{5 \sin^3 x}{\arccos(7x)}$$

4. °Найти  $dy$  дифференциал функции, где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – функции:

$$y = \log_2(u^5 \cdot v^3)$$

5. °Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{\ln(x-2)} - \frac{1}{x-3} \right)$$

Экзамен в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из пяти частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос первой части дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос третьей части дается в развернутой форме.

Четвертая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.2, ИОПК-1.4 и ИОПК 3.4. Ответ на вопрос четвертой части предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов

### **Примерный перечень теоретических вопросов.**

1. Вопрос 1. Теорема о существовании супремума.

2. Вопрос 2. Теорема о существовании предела монотонной последовательности.

3. Вопрос 3. Необходимое и достаточное условие экстремума функции.

**Примеры задач.**

1. Задача 1.

Показать существование предела по теореме о монотонной и ограниченной последовательности:

$$x_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

Зачет во втором семестре проводится в письменной форме в виде самостоятельной работы по последнему разделу материала второго семестра. Продолжительность зачета 1,5 часа. Самостоятельная работа состоит из девяти задач, проверяющих ИОПК-1.2, ИОПК-1.4, ИОПК-3.2 и ИОПК 3.4.

**Примеры задач.**

1. Найти и изобразить область определения функции:

$$u = \frac{\sqrt{x^2 - x + y^2 + 2y}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

2. Найти и изобразить линии уровня функции:

$$z = x^2 - 4y^2$$

3. Найти повторные пределы функции, если  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ :

$$f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}$$

4. Найти и классифицировать точки разрыва функции:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 3y^2 - 4}$$

5. °Найти дифференциалы первого и второго порядка для функции:

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}$$

6. °Найти дифференциалы первого и второго порядка сложной функции:

$$u = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$$

7. °Найти  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ :

$$F(x + y + z, xyz) = 0$$

8. °Найти экстремум функции:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

9. °Найти условный экстремум функции:



$$z = xy \text{ при условии } 2x + 3y - 5 = 0$$

Экзамен во втором семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из четырех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос первой части дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос третьей части дается в развернутой форме.

Четвертая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-1.3 и ИОПК-3.1. Ответ на вопрос четвертой части дается в развернутой форме.

Пятая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.2, ИОПК-1.4 и ИОПК-3.4. Ответ на вопрос пятой части предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов

### Примерный перечень теоретических вопросов.

1. Вопрос 1. Метод неопределенных коэффициентов: разложение дроби с комплексными корнями знаменателя.

2. Вопрос 2. Площадь плоской фигуры: параметрическое задание кривой.

3. Вопрос 3. Признак Абеля для несобственного интеграла 2 рода.

4. °Вопрос 4. Теорема о существовании повторных и двойного пределов.

### Примеры задач.

1. Задача 1.

Вычислить длину дуги:

$$x = \sin^3 t; y = \cos^3 t; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Зачет в третьем семестре проводится в письменной форме в виде самостоятельной работы по последнему разделу материала третьего семестра. Продолжительность зачета 1,5 часа. Самостоятельная работа состоит из пяти задач, проверяющих ИОПК-1.2, ИОПК-1.4, ИОПК-3.2 и ИОПК 3.4.

### Примеры задач.

1. °Задача 1.

Вычислить:  $\int_C y^2 ds$ , если  $C$  - арка циклоиды:  $x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t); 0 \leq t \leq 2\pi$

2. °Задача 2.

Вычислить:  $\int_C (x^2 - y^2) dx + xy dy$ , если  $C$  - отрезок прямой от  $A(1,1)$  до  $B(3,4)$ .

3. °Задача 3.

Вычислить:  $\iint_D \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , если  $D$  ограничена линиями:  $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9}; x^2 + y^2 = \pi^2$ .

4. °Задача 4.

Расставить пределы интегрирования в различном порядке, если область интегрирования ограничена линиями:  $y = 0, y = a, x + y = 0, x + y = 2a$ .

#### 5. Задача 5.

Перейдя к полярным координатам, расставить пределы интегрирования в различном порядке, если область интегрирования ограничена линиями:  $-2 \leq x \leq 0, x^2 \leq y \leq 2 - x$ .

Экзамен в третьем семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из шести. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос первой части дается в развернутой форме.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос третьей части дается в развернутой форме.

Четвертая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос четвертой части дается в развернутой форме.

Пятая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.1, ИОПК-3.1 и ИОПК-3.3. Ответ на вопрос пятой части дается в развернутой форме.

Шестая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-1.2, ИОПК-1.4 и ИОПК-3.4. Ответ на вопрос шестой части предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов

#### **Примерный перечень теоретических вопросов.**

1. Вопрос 1. Переместительное свойство рядов и теорема Римана.
2. Вопрос 2. Критерий независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути.
3. Вопрос 3. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
4. °Вопрос 4. Замена переменных в двойном интеграле.
5. °Вопрос 5. Определение и свойства бэ́та-функции.

#### **Примеры задач.**

1. Задача 1.

Найти сумму ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$ .

Результаты зачета оцениваются оценками «зачтено» и «незачтено».

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

В течение семестра в рамках текущего контроля оцениваются по пятибалльной системе посещаемость занятий, выполнение домашних и контрольных работ по материалу семестра, результаты коллоквиумов.

Оценка «зачтено» в промежуточной аттестации в виде зачета выставляется, если средняя оценка текущего контроля и результата зачета оказывается не ниже «удовлетворительно».

Оценки при проведении экзаменов формируются в соответствии с Приложением 1 «Оценочные средства по дисциплине».

Если при проведении коллоквиумов по соответствующим частям в рамках текущего контроля были получены оценки не ниже «удовлетворительно», они могут быть учтены как составляющие экзаменационной оценки.

Типовые контрольные задания и иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций, и



методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения, приведены в Приложении 1 к рабочей программе «Оценочные средства по дисциплине».

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle»:

- <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=9048>

- <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=31476>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

– Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т. 1, 2, 3. СПб.: Лань. 2019. 608 с., 800 с., 656 с.

– Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, т. 1, 2. М.: Физматлит. 2009. 1084 с.

– °Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: в 2-х частях. М.: Физматлит, 2005. 648 с., 164 с.

– Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ. 2009. 624 с.

– Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. В 3 т. М.: Физматлит. 2009, 496 с., 504 с., 470 с.

б) дополнительная литература:

– Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3 т. М.: МЦНМО, 2018. 412 с., 480 с., 256 с.

– Змеев О.А., Терпугов А.Ф., Якупов Р.Т. Математический анализ, ч.1,2,3. Томск: НТЛ. 2007. 172 с., 169 с., 151 с.

– Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. СПб: Профессия. 2008. 432 с.

– Марголис Н.Ю. Пределы. Изд-во ТГУ. 2016. 32 с.

– Марголис Н.Ю. Несобственные интегралы. Изд-во ТГУ. 2000. 18 с.

– Гендрина И.Ю., Завгородняя М.Е., Колосова О.А. Несобственные интегралы I и II рода. Изд-во ТГУ. 2007. 30 с.

– Гендрина И.Ю., Завгородняя М.Е., Колосова О.А. Интегралы, зависящие от параметра. Изд-во ООО «Лито-принт». 2009. 36 с.

– Терпугов А.Ф. Суммирование степенных рядов. Изд-во ТГУ. 1990. 17 с.

– Терпугов А.Ф. Вычисление и преобразование двойных интегралов. Изд-во ТГУ. 1990. 17 с.

– Терпугов А.Ф. Вычисление и преобразование тройных и многократных интегралов. Изд-во ТГУ. 1992. 17 с.

– Тривоженко Г.В., Туренова Е.Л. Производные и дифференциалы функций многих переменных. Изд-во ТГУ. 2004. 15 с.

в) ресурсы сети Интернет:

–°Открытые онлайн-курсы

–°Лекции, примеры решения задач, интегралы и производные, дифференцирование, ТФКП, Электронные учебники. Типовой расчет из задачника Кузнецова. <http://www.matclub.ru>

–°Математический анализ . Электронный ресурс 2 / под ред. В.А. Садовничего <http://chamo.lib.tsu.ru/lib/item?id=chamo:238653&theme=system>

–°Математика. <http://chamo.lib.tsu.ru/lib/item?id=chamo:238652&theme=system>

– Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3 т. М.: МЦНМО, 2018. 412 с., 480 с., 256 с. <http://sun.tsu.ru/limit/2016/000132365/000132365.pdf>

– Проекты лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН – <http://etudes.ru/>

– Проекты лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН – <http://book.etudes.ru/>

– Проекты лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН – <http://tcheb.ru/>

### **13. Перечень информационных технологий**

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

– Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>

– ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>

– ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

### **15. Информация о разработчиках**

Гендрина Ирина Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.