

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Динамическое программирование

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки
Фундаментальная математика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
П.А.Крылов

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

Контрольная работа No1. (ИОПК-1.1, ИПК-1.1).

Целью Контрольной работы No1 является оценка результатов обучения студентом раздела курса посвященному методам динамического программирования для задачи оптимального потребления в дискретном времени.

Типовой вариант «Контрольной работы No1»

1. Найти оптимальные потребления для $U(x) = 4x^{1/4}$, $h(x) = 2x^{1/2}$, $N = 1$ и начального капитала $x > 0$.

2. Найти оптимальные потребления для $U(x) = 0$, $h(x) = x^{1/2}$, $N \geq 3$ и начального капитала $x > 0$.

3. Найти оптимальные потребления для $U(x) = \ln x$, $h(x) = 0$, $N \geq 3$ и начального капитала $x > 0$.

Контрольная работа No2. (ИОПК-1.1, ИПК-1.1).

Целью Контрольной работы No1 является оценка результатов обучения студентом раздела курса посвященному методам стохастического динамического программирования для задачи оптимального потребления и инвестирования в дискретном времени.

Типовой вариант «Контрольной работы No2»

1. Рассмотрим задачу оптимального потребления и инвестирования для

$N \geq 3$, $U(x) = 4x^{1/4}$, $h(x) = 8x^{1/4}$ и начального капитала $x > 0$.

- (a) Построить оптимальные стратегии потребления и инвестирования в этом случае.
- (b) Подсчитать среднее и дисперсию для терминального капитала оптимальной стратегии.

2. Рассмотрим задачу оптимального потребления и инвестирования для

$N = 1$, $U(x) = 4 \ln x^2$, $h(x) = 2x^{1/2} + 2$ и начального капитала $x > 0$.

1. (a) Построить оптимальные стратегии потребления и инвестирования в этом случае.
2. (b) Подсчитать среднее и дисперсию для терминального капитала оптимальной стратегии.

Критерии оценивания:

Результаты выполнения контрольных работ определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок. Оценка «хорошо» выставляется, если 75 процентов задач решены верно. Оценка «удовлетворительно» выставляется, 50 процентов задач решены без ошибок. Иначе выставляется оценка «неудовлетворительно».

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен во втором семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 2 часа. Первая часть состоит из двух вопросов проверяющих ИОПК 1.1. Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИПК 1.1. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Дать определение задачи оптимального управления в дискретном времени.
2. Дать определение класса допустимых стратегий для задачи оптимального управления в дискретном времени.
3. Дать определение целевой функции для задачи оптимального управления в дискретном времени.
4. Сформулировать принцип динамического программирования в дискретном времени.
5. Дать определение задачи оптимального стохастического управления в дискретном времени.

6. Дать определение класса допустимых стратегий для задачи стохастического оптимального управления в дискретном времени.
7. Дать определение целевой функции для задачи стохастического оптимального управления в дискретном времени.
8. Записать уравнения Беллмана для задачи оптимального стохастического управления в дискретном времени.
9. Сформулировать принцип стохастического динамического программирования в дискретном времени.
10. Дать определение задачи оптимального управления в непрерывном времени.
11. Дать определение целевой функции для задачи оптимального управления в непрерывном времени.
12. Дать определение функции Гамильтона.
13. Записать уравнение Гамильтона - Якоби - Беллмана для задачи оптимального потребления в непрерывном времени. Сформулировать принцип стохастического динамического программирования для этого случая.

Примеры задач:

1. Найти оптимальные потребления для $U(x) = 8x^{1/2}$, $h(x) = 4x^{1/2}$, $N = 1$ и начального капитала $x > 0$.
2. Найти оптимальные потребления для $U(x) = 0$, $h(x) = \ln x$, $N \geq 3$ и начального капитала $x > 0$.
3. Найти оптимальные потребления для $U(x) = 14x^{1/7}$, $h(x) = 0$, $N \geq 3$ и начального капитала $x > 0$.
4. Рассмотрим задачу оптимального потребления и инвестирования для $N \geq 3$,

$$U(x) = 4x^{1/4}, h(x) = 8x^{1/4} \text{ и начального капитала } x > 0.$$

(a) Построить оптимальные стратегии потребления и инвестирования в этом случае.

(b) Подсчитать среднее и дисперсию для терминального капитала оптимальной стратегии.

5. Рассмотрим задачу оптимального потребления и инвестирования для

$$N = 1, U(x) = 4 \ln x^{1/2}, h(x) = 2x^{1/2} + 2 \text{ и начального капитала } x > 0.$$

(a) Построить оптимальные стратегии потребления и инвестирования в этом случае.

(b) Подсчитать среднее и дисперсию для терминального капитала оптимальной стратегии.

Итоговая оценка – среднее арифметическое из оценок за контрольные работы и экзамен. При ответе на теоретический вопрос оценивается полнота и точность ответа, логичность и аргументированность изложения материала.

Критерии оценивания задачи

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Работа не сдана или выполнены верно менее 25% заданий	Выполнены верно от 25% до 50% заданий	Выполнены верно от 21% до 80% заданий	Выполнены верно более 80% заданий

Критерии оценивания теоретических вопросов экзамена

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Дан неправильный ответ, однозначно неправильная трактовка темы.	В целом дан правильный ответ на вопрос, но он изложен поверхностно и с нарушением логики изложения. Знание минимума литературы.	Дан правильный ответ на вопрос, но не все изложено развернуто и логически структурировано. Знание основной литературы.	Дан правильный и развернутый ответ на вопрос. Студент четко и логично изложил свой ответ на поставленный в билете вопрос. Знание основной и дополнительной литературы.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Вопросы (ИОПК-1.1, ИПК-1.1)

1. Дать определение целевой функции на интервале для задачи оптимального потребления в дискретном времени на интервале $[0, N]$.
2. Написать уравнения Беллмана для задачи оптимального потребления в дискретном времени.
3. Записать принцип стохастического динамического программирования для задачи оптимального потребления и инвестирования в дискретном времени.
4. Найти функцию Гамильтона для задачи оптимального потребления в непрерывном времени для степенной функции полезности $U(x) = x^\gamma$, $0 < \gamma < 1$.

Ответы к вопросам:

1- целевой функцией на интервале $[0, N]$ называется функция от начального капитала $x > 0$ и стратегии потребления (c_0, \dots, c_{N-1}) определенная как

$$J_0(x, c_0, \dots, c_{N-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} U(c_k) + h(x_N),$$

где $U: R_+ \rightarrow R$ это функция полезности и $h: R_+ \rightarrow R$ это функция наследственности.

2 – уравнения Беллмана для задачи оптимального потребления в дискретном времени это разностные уравнения для оптимальных целевых функций $(J_n^*(x))_{0 \leq n \leq N}$, такие что $J_N^*(x) = h(x)$, а при $0 \leq n \leq N - 1$

$$J_n^*(x) = \max_{0 \leq c \leq x} (U(c) + J_{n+1}^*(\phi(x, c))),$$

где $\phi(x, c) = R(x - c)$ и R это коэффициент доходности безрискового актива.

3 – Оптимальные целевые функции $(J_n^*(x))_{0 \leq n \leq N-1}$ удовлетворяют следующим уравнениям Беллмана:

$$J_n^*(x) = \max_{0 \leq c \leq x, \theta \in \Theta} (U(c) + \bar{J}_{n+1}(x, c, \theta)), \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

$$J_N^*(x) = h(x).$$

4- В данном случае функция Гамильтона имеет следующий вид

$$H(x, z) = \sup_{\vartheta \geq 0} (z(r x - \vartheta) + \vartheta^\gamma).$$

Следовательно, если $z \leq 0$, то $H(x, z) = +\infty$, а при $z > 0$

$$H(x, z) = r z x + (1 - \gamma) \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Информация о разработчиках

Пергаменщиков Сергей Маркович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ