Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан
_______________Л. В.Гензе
«30» _____06_____ 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

Пространства последовательностей и базисы

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :
Фундаментальная математика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2022

Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.3.ДВ.03.04

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
___________П.А.Крылов

Председатель УМК
___________Е.А.Тарасов

Томск – 2022

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить аппарат функционального анализа, относящийся к исследованию свойств последовательностей в банаховых пространствах, таких как полнота, минимальность, базисность,переполненность.

– Научиться применять понятийный аппарат для исследования вопросов о сходимости рядов в банаховых пространствах, о дополняемости и изоморфности банаховых пространств, в частности пространств непрерывных функций , то есть для решения практических задач профессиональной деятельности математика-теоретика.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Второй семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Дополнительные главы функционального анализа.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплин

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 з.е., 216 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

-практические занятия: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема1. Базисы в банаховых пространствах

1. Базисы Гамеля, базисы Шаудера Критерий Гринблюма.

2. Полные, минимальные, переполненные системы элементов в банаховых пространствах. Биортогональные системы
3. Базисы в гильбертовом пространстве. Теорема Банаха о базисности биортогональной системы. Базисы Рисса. Бесселевы системы. Матрицы Грама.
4. Базисы в гильбертовом пространстве. Теорема Банаха о базисности биортогональной системы. Базисы Рисса. Бесселевы системы. Матрицы Грама
5. Универсальность пространства C[0,1].
6. Слабые топологии в банаховых пространствах.Компактность, метризуемость.
7. Теорема Эберлейна-Шмульяна.

Тема2.Пространства последовательностей.

1. Базисы в пространствах последовательностей. Блок-базисы.
2. Проекторы. Дополняемые подпространства в пространствах последовательностей.
3. Техника разложения Пелчинского. Изоморфизм пространств.
4. Пространство Суммируемых последовательностей l1. Свойство Шура. Теорема Питта.
5. Инъективные пространства. Инъективность l_∞. Недополняемость сепарабельных пространств в пространстве l_∞.
6. Пространство c_0. Дополняемость c_0. Теорема Собчика.
7. Сходимость рядов в банаховых пространствах. Безусловная и слабо безусловная сходимость рядов.
8. Слабо компактные операторы в банаховых пространствах. Теоремы Пелчинского и Линденштрауса.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, вопросов по лекционному материалу, выполнения домашних индивидуальных заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен во втором семестре проводится в устной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть, проверяющая ИОПК 1.1, представляет собой теоретический вопрос по первой части курса «Базисы в банаховых пространствах». Ответ на вопрос предполагает полное доказательство теорем и ответы на дополнительные вопросы по этой теме..

Вторая часть содержит один вопрос, также проверяющий ИОПК 1.1, по второй части курса «Пространства последовательностей». Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит 2 вопроса, проверяющих ИПК-1.1, и оформленных в виде практических задач. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Определение базиса. Критерий Гринблюма.
2. Минимальность и полнота базиса. Пример полной минимальной системы, не являющейся базисом.
3.Существование базисной последовательности в банаховом пространстве.

4.Проекторы. Дополняемые пространства.
5.Блок базисы.
6.Схема разложения Пелчинского.
7.Пространство суммируемых последовательностей. Свойство Шура.
8.Пространство ограниченных последовательностей. Инъективность.
9.Прострвнство сходящихся последовательностей. Сепарабельная инъективность.
10. Теорема Эберлена-Шмульяна.
11. Унивесальность пространства C[0,1].
12.Метризуемость в пространствах, наделённых слабой топологией.
13.Слабая компактность и слабо-компактные операторы.
14.Абсолютная и условная сходимость рядов в банаховых пространствах

Примеры задач:

1. Являются ли последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полными в пространстве l_2 и $C[0,1]$ соответственно.

a) $f_n = (0,0,\dots 0,\underset{n}{1},1,0,\dots)$;

b) $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$ минимальной

$f_1 = (1,0,0,\dots..)$; $f_n = (1,0,\dots 0,\underset{n}{\frac{1}{n}},0,\dots),\quad n \geq 2$

3. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ базисом в c_0, где $f_n = \{0,\dots,0,\underset{n}{1},0,\dots\}$.

4. Из данной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в ℓ_p (или c_0)

извлечь подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису $\{e_n\}$ и построить проектор P: $\ell_p \to \mathrm{sp}\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ или проектор P: $c_0 \to \mathrm{sp}\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, где

a). $x_n = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots \frac{1}{n},0,0,\dots\right)$ в ℓ_1.
n раз

b). $x_n = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots \frac{1}{n},1,0,0,\dots\right)$ в c_0.
n раз

c). $x_n = \left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}},\dots\frac{1}{2^2},\frac{1}{2},0,0,\dots\right)$ в ℓ_1.

d). $x_n = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n-1},\dots\frac{1}{2},1,0,0,\dots\right)$ в c_0.

5. Доказать, что не существует изоморфизма T: $\ell_3 \to \ell_2$.
6. Доказать, что пространство ℓ_1^2 не является изометрически изоморфным

пространству ℓ_2^2.

7. Доказать, что не существует изоморфизма T: ℓ_3 в ℓ_1.

8. Доказать, что пространство ℓ_2^3 не является изометрически изоморфным

пространству ℓ_3^3.

9. Докажите, что пространство $(\ell_1 \times \ell_1 \times \dots)_{c_0}$ не изоморфно пространству ℓ_1.
10. Пусть P – произвольный проектор пространства c на c_0. Докажите, что $\|P\| \geq 2$.
11. Докажите, что пространство $(c_0 \times c_0 \times \dots)_{\ell_1}$ не изоморфно пространству ℓ_1.
12. Построить подпространство $E \subset C[0,1]$, изометричное c_0 и проектор P: C[0,1]→

c_0.

13. Докажите, что пространство $(\ell_1 \times \ell_1 \times \dots)_{c_0}$ не изоморфно пространству . c_0.
14. Можно ли пространство c_0 изоморфно вложить в пространство ℓ_1.

15. Докажите, что пространство $(c_0 \times c_0 \times \dots)_{\ell_1}$ не изоморфно пространству c_0
16. Докажите, что пространство C[0,1] дополняемо не вкладывается в пространство l_∞

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» предполагает ответы на все вопросы и выполнение индивидуальных заданий .Оценка «хорошо» предполагает выполнение индивидуальных заданий, решение одной задачи и ответов на теоретическте вопросы сдоказательством одного из них. Оценка «удовлетворительно» может быть выставлена за решение задач на экзамене, ответы на теоретические вопросы без доказательства и выполнение индивидуальных задани в семестре.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=11446

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

г) Методические указания по выполнению индивидуальных задани

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Fabian M. et al. Functional analysis and infinite-dimensional geometry. – Springer Science & Business Media, 2013.
2. Колмогоров Л.В, Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: физ.мат.лит , 2009. 570 с.
3. Хелемский А.Я Лекции по функциональному анализу. М: МЦНМО, 2014.
4. Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И. А. Задачи по функциональному анализу Электронное издание М.: МЦНМО, 2017. -334 с. ISBN 978-5-4439-3092-3.

б) дополнительная литература:

1. Albiac F., Kalton N. J. Topics in Banach space theory. – Springer Science & Business Media, 2006. – Т. 233.
2. Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases. – Boston: Birkhäuser, 2003. .
3. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. -448 с

в) ресурсы сети Интернет:
– открытые онлайн-курсы.

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:
публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).
б) информационные справочные системы:
– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system
– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index
– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Хмылёва Татьяна Евгеньевна, доцент, канд. физ.-мат. наук, ТГУ, доцент кафедры математического анализа и теории функций.