

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ

Директор института прикладной  
математики и компьютерных наук

А.В. Замятин

« 11 » \_\_\_\_\_ 2021 г.

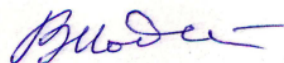


## Дифференциальные и разностные уравнения

### рабочая программа дисциплины

Закреплена за кафедрой	<i>Прикладной информатики</i>
Учебный план	<i>02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии</i> <i>Направленность (профиль) «Искусственный интеллект и разработка программных продуктов»</i>
Форма обучения	<i>очная</i>
Общая трудоёмкость	<i>3 з.е.</i>
Часов по учебному плану	<i>108</i>
в том числе:	
аудиторная контактная работа	<i>42.25</i>
самостоятельная работа	<i>65.75</i>
Вид(ы) контроля в семестрах	
экзамен/зачет/зачет с оценкой	<i>3 семестр – зачет с оценкой</i>

Программу составил:  
д-р техн. наук, профессор,  
профессор кафедры прикладной информатики



В.В. Поддубный

Рецензент:  
д-р техн. наук, профессор,  
профессор кафедры теоретических основ информатики



Ю.Л. Костюк

Рабочая программа дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения» разработана в соответствии с образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат, самостоятельно устанавливаемым федеральным государственным автономным образовательным учреждением высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии (Утвержден Ученым советом НИ ТГУ, протокол от 27.10.2021 г. № 08).

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры прикладной информатики

Протокол от 09 июня 2021 № 17

Заведующий кафедрой прикладной информатики,  
д-р техн. наук, профессор



С.П. Сущенко

Рабочая программа одобрена на заседании учебно-методической комиссии института прикладной математики и компьютерных наук (УМК ИПМКН)

Протокол от 17 июня 2021 г. № 05

Председатель УМК ИПМКН,  
д-р техн. наук, профессор



С.П. Сущенко

## Цель освоения дисциплины

**Цель дисциплины** – обучение студентов в естественной полноте и целостности методам дифференциальных и разностных уравнений, формирование навыков и умений, необходимых при практическом применении математических идей и методов для анализа и моделирования сложных систем, процессов и явлений, для поиска оптимальных решений и выбора наилучших способов реализации.

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Дифференциальные и разностные уравнения» относится к обязательной части Блока 1 «Дисциплины», входит в модуль «Математика».

Пререквизиты дисциплины: «Дискретная математика», «Алгебра и геометрия», «Математический анализ», «Математическая логика и теория алгоритмов»

Постреквизиты дисциплины: «Вычислительная математика»

## 2. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины

Таблица 1.

Компетенция	Индикатор компетенции	Код и наименование результатов обучения (планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций)
ОПК-1. Способность применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	ИОПК-1.1. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук	ОР-1.1.1. Знать принципы работы с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Понятие решения дифференциального уравнения. Особые точки и особые решения ДУ. ОР-1.1.2. Знать принципы работы с разностными уравнениями и методы приближенного интегрирования ДУ. Понятие полного метрического пространства. ОР-1.1.3. Знать принципы работы с дифференциальными уравнениями более высокого порядка
	ИОПК-1.2. Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности	ОР-1.2.1. Знать принципы работы с линейными ДУ с постоянными коэффициентами ОР-1.2.2. Знать принципы работы с операционными исчислениями
	ИОПК-1.3. Обладает необходимыми знаниями для исследования информационных систем и их компонент	ОР-1.3.1. Знать принципы работы с автономными (консервативными) системами. ОР-1.3.2. Знать принципы работы с первыми интегралами ДУ (законы сохранения). ОР-1.3.3. Знать теорию устойчивости

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1. Структура и трудоемкость видов учебной работы по дисциплине

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

Таблица 2.

Вид учебной работы	Трудоемкость в академических часах	
	3 семестр	всего
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>108</b>	<b>108</b>
<b>Контактная работа:</b>	<b>42.25</b>	<b>42.25</b>
Лекции (Л):	24	24
Практики (ПЗ)	16	16
Групповые консультации	2	2
Промежуточная аттестация	0.25	0.25
<b>Самостоятельная работа обучающегося:</b>	<b>65.75</b>	<b>65.75</b>
- изучение учебного материала, публикаций	21	21
- выполнение практических заданий	21	21
- подготовка к рубежному контролю по теме/разделу	23.75	23.75
<b>Вид промежуточной аттестации (зачет, зачет с оценкой, экзамен)</b>	<b>Зачет с оценкой</b>	<b>Зачет с оценкой</b>

### 3.2. Содержание и трудоемкость разделов дисциплины

Таблица 3.

Код занятия	Наименование разделов и тем и их содержание	Вид учебной работы, занятий, контроля	С е м е с т р	Часы в электронной форме	Всего (час.)	Литература	Код (ы) результата(ов) обучения
1	<p><b>Тема 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.</b>                      Краткое содержание темы. Дифференциальные уравнения (ДУ). Основные понятия. Определение дифференциального уравнения. Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Порядок и степень дифференциального уравнения. Понятие решения дифференциального уравнения. Интегральная кривая, частное решение, общее решение, интеграл дифференциального уравнения. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения, разрешенные относительно производной. Поле направлений касательных. Изоклины. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные уравнения первого порядка. Неоднородные уравнения. Метод Лагранжа вариации постоянных. Метод Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения. Условия Липшица. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра и начальных условий. Теорема о дифференцируемости решений. Особые точки и особые решения ДУ.</p>	Л, ПЗ	3		5		ОР-1.1.1
	<p>Форма СРС:                      - изучение учебного материала, публикаций,                      - выполнение практических заданий</p>	СРС	3		5.25	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	
2	<p><b>Тема 2. Разностные уравнения и методы приближенного интегрирования ДУ.</b>                      Краткое содержание темы. Понятие полного метрического пространства. Фундаментальные последовательности. Принцип сжатых отображений. Теорема о неподвижной точке. Задача Коши. Метод последовательных приближений Пикара. Разностные схемы. Метод ломаных Эйлера. Недостатки метода ломаных и метода последовательных приближений. Метод Эйлера с уравниванием и метод Хьюна. Методы Рунге-Кутты. Общие и частные явные и неявные методы Рунге-Кутты. Порядок точности численных методов решения задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка. Схема метода Рунге-Кутты второго-третьего порядка точности. Схема метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности.</p>	Л, ПЗ	3		5		ОР-1.1.2
	<p>Форма СРС:                      - изучение учебного материала, публикаций,</p>	СРС	3		5.25	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	

	- выполнение практических заданий						
3	<b>Тема 3. Дифференциальные уравнения более высокого порядка.</b> Краткое содержание темы. Система ДУ. Каноническая (нормальная) форма системы ДУ. Векторное ДУ. Фазовое пространство, фазовые переменные, фазовая кривая, фазовая траектория, фазовый портрет ДУ. Динамическая система. Общий интеграл и частное решение векторного ДУ. Начальная задача (задача Коши), двухточечная краевая задача (ДТКЗ), многоточечные краевые задачи. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для векторного ДУ. Линейные векторные ДУ (системы линейных ДУ). Теоремы существования и единственности для линейных векторных ДУ. Линейно независимые системы решений. Определитель Вронского и его свойства. Фундаментальная система решений.	Л, ПЗ	3		5		ОР-1.1.3
	Форма СРС: - изучение учебного материала, публикаций, - выполнение практических заданий	СРС	3		5.25	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	
4	<b>Тема 4. Линейные ДУ с постоянными коэффициентами.</b> Краткое содержание темы. Матричная экспонента. Собственные векторы и собственные числа матрицы коэффициентов. Представление общего решения системы однородных ДУ с постоянными коэффициентами через собственные векторы и собственные числа матрицы коэффициентов. Фундаментальная система решений. Фундаментальная матрица. Представление решений однородной и неоднородной системы ДУ с постоянными коэффициентами через фундаментальную матрицу. Метод вариации постоянных. Теорема Ливуилля. Построение решения при различных корнях характеристического уравнения. Построение решения при наличии кратных корней характеристического уравнения.	Л, ПЗ	3		5		ОР-1.2.1
	Форма СРС: - изучение учебного материала, публикаций, - выполнение практических заданий	СРС	3		5.25	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	
5	<b>Тема 5. Операционное исчисление.</b> Краткое содержание темы. Операционное исчисление Хевисайда. Оригиналы и изображения. Преобразование Лапласа. Основные формулы операционного исчисления (линейность преобразования Лапласа, изображение производных, теорема запаздывания). Теорема единственности. Интегрирование ДУ методами операционного исчисления.	Л, ПЗ	3		5		ОР-1.2.2
	Форма СРС: - изучение учебного материала, публикаций, - выполнение практических заданий	СРС	3		5.25	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	
6	<b>Тема 6. Автономные (консервативные) системы.</b> Краткое содержание темы. Определение и свойства автономных систем. Точка покоя (равновесия). Возможные типы фазовых траекторий автономных систем. Примеры автономных систем: модели “хищник - жертва” (уравнение Лотки-	Л, ПЗ	3		5		ОР-1.3.1

	Вольтерры, модифицированные уравнения Лотки-Вольтерры, уравнение Холлинга-Тэннера). Качественная теория автономных систем второго порядка. Линеаризация ДУ вблизи точки покоя. Поля скоростей и направлений исходных и линеаризованных уравнений. Точки покоя как особые точки. Их классификация (узел, фокус, центр, седловая точка) и свойства. Циклы. Точки бифуркации. Бифуркация рождения цикла (бифуркация Хопфа). Предельный цикл. Устойчивый и неустойчивый фокусы. Аттракторы и репеллеры.						
	Форма СРС: - изучение учебного материала, публикаций, - выполнение практических заданий	СРС	3		5.25	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	
7	<b>Тема 7. Первые интегралы ДУ (законы сохранения).</b> Краткое содержание темы. Определение и свойства первых интегралов. Теоремы о первых интегралах. Производная в силу системы ДУ (производная по направлению векторного поля скоростей, производная Ли). Связь первых интегралов с фазовым портретом системы и законами сохранения на примере уравнений Лотки-Вольтерры и линеаризованных уравнений Холлинга-Тэннера.	Л, ПЗ	3		5		ОР-1.3.2
	Форма СРС: - изучение учебного материала, публикаций, - выполнение практических заданий	СРС	3		5.25	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	
8	<b>Тема 8. Теория устойчивости.</b> Краткое содержание темы. Определение устойчивости по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Неустойчивость. Второй метод Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости. Функция Ляпунова. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Устойчивость положения равновесия линейной однородной автономной системы. Теорема о необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости. Устойчивость нелинейных автономных систем по линейному приближению. Теоремы Ляпунова и Четаева об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица. Качественный анализ решений линейных (и линеаризованных) ДУ второго порядка по собственным числам матрицы коэффициентов (решениям характеристического уравнения).	Л, ПЗ	3		5		ОР-1.3.3
	Форма СРС: - изучение учебного материала, публикаций, - выполнение практических заданий.	СРС	3		5.25	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	
	Консультации в период теоретического обучения	Консультация	3		2		
	<b>Подготовка к промежуточной аттестации в форме зачета с оценкой</b>	СРС	<b>3</b>		<b>23.75</b>		
	<b>Прохождение промежуточной аттестации в форме зачета с оценкой</b>	ЗаО	<b>3</b>		<b>0.25</b>		

#### 4. Образовательные технологии, учебно-методическое и информационное обеспечение для освоения дисциплины

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, тестов по лекционному материалу, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

Дифференцированный зачёт в третьем семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет состоит из двух частей.

Первая часть содержит задание, проверяющее ИОПК-1.1, ИОПК-1.2 и ИОПК-1.3 по темам 1, 2, 3.

Вторая часть содержит задание, проверяющее ИОПК-1.1, ИОПК-1.2 и ИОПК-1.3 по темам 3, 4, 6.

Ответы на вопросы каждой части даются в развернутой форме и предполагают аналитическое решение предлагаемых задач с теоретическим обоснованием решений, а также программную реализацию и исследование решений на языке программирования MATLAB (или FreeMat) с представлением листинга программ и графических результатов.

##### Примерная форма вопросов зачётного задания:

**Задание 1.** Дано обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

- 1) Найти общее аналитическое решение ДУ, приведя в отчёте все промежуточные выкладки и пояснения.
- 2) Выделить из общего решения ДУ решение задачи Коши с начальным условием  $(x_0, y_0)$  и получить формулу, выражающую постоянную интегрирования  $c_0$  через  $x_0, y_0$ .
- 3) Задать численное значение начального условия  $(x_0, y_0)$  и границу  $x_{fin}$  интервала интегрирования.
- 4) Найти численное решение задачи Коши с использованием встроенной в Matlab (или FreeMat) процедуры `ode45` интегрирования ДУ по методу Рунге-Кутты 4-го порядка точности с заданной точностью  $1e-8$ .
- 5) Проверить правильность аналитического решения задачи Коши по невязке аналитического решения на численном решении (вывести невязку на график и объяснить, правильно ли получено аналитическое решение).
- 6) Вывести на графики интегральную кривую  $y(x)$  (в координатах  $(x, y)$ ) и фазовую траекторию (в координатах  $(y, f(x, y))$ ) решения задачи Коши, где  $f(x, y)$  – правая часть ДУ, разрешённого относительно производной.
- 7) Привести в отчёте листинг программы (в текстовом виде, чтобы его можно было скопировать и вставить в редактор системы программирования), скриншоты её исполнения и все полученные графики со всеми объяснениями.

**Задание 2.** Дана  $2 \times 2$ -матрица  $A$  коэффициентов системы линейных однородных дифференциальных уравнений.

- 1) Записать систему ДУ в векторно-матричной форме.
- 2) Составить систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений.
- 3) По матрице  $A$  построить характеристическое уравнение, исходя из его определения.
- 4) По виду характеристического уравнения построить ДУ второго порядка, эквивалентное системе ДУ.
- 5) Решить характеристическое уравнение и найти собственные числа матрицы  $A$ .
- 6) Построить общее аналитическое решение системы ДУ.
- 7) Определить тип тривиальной точки покоя системы.



- 8) Выделить из общего решения ДУ решение задачи Коши с начальным условием  $(x_0, y_0)$  и найти постоянные интегрирования в виде формул их зависимости от начальных условий.
- 9) Задать численное значение начального условия  $(x_0, y_0)$  и границу  $x_{fin}$  интервала интегрирования.
- 10) Найти численное решение задачи Коши с использованием встроенной в Matlab (FreeMat) процедуры ode45 интегрирования ДУ по методу Рунге-Кутты 4-го порядка точности с заданной точностью  $1e-8$ .
- 11) Проверить правильность аналитического решения задачи Коши по невязке аналитического решения на численном решении (вывести невязки каждой компоненты решения на графики и объяснить, правильно ли получено аналитическое решение).
- 12) Вывести на графики интегральные кривые  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  (в координатах  $(x, y)$ ) и фазовую траекторию (в координатах  $(y_1, y_2)$ ) решения задачи Коши.
- 13) Привести в отчёте листинг программы (в текстовом виде, чтобы его можно было скопировать и вставить в редактор системы программирования), скриншоты её исполнения и все полученные графики со всеми объяснениями.

Результаты дифференцированного зачёта определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка определяется как среднее арифметическое оценок по пунктам зачётного задания.

Текущий контроль влияет на промежуточную аттестацию с весом не более 40% при взвешенном усреднении оценок текущего контроля и промежуточной аттестации.

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций, и методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения, приведены в Приложении 1 к рабочей программе «Фонд оценочных средств».

#### 4.1. Рекомендуемая литература и учебно-методическое обеспечение

№ п/п	Авторы / составители	Заглавие	Издательство	Год издания, количество страниц
Основная литература				
1.	Федорюк М.В.	Обыкновенные дифференциальные уравнения	Наука	1985 г., 448 с.
2.	Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г	Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи	Мир	1990 г., 512 с.
3.	Ортега Дж., Пул У.	Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений	Наука	1986 г., 288 с.
4.	Годунов С.К., Рябенский В.С.	Разностные схемы (введение в теорию).	Наука, ГИФМЛ	1977 г., 440 с.
Дополнительная литература				
5.	Степанов В.В.	Курс дифференциальных уравнений	Наука, ГИФМЛ	1959 г., 468 с.
6.	Эрроусмит Д., Плейс К	Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями	Мир	1986 г., 244 с.

7.	Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н.	MATLAB 7	БХВ-Петербург	2005 г., 1104 с.
----	--	----------	---------------	------------------

#### **4.2. Базы данных и информационно-справочные системы, в том числе зарубежные**

##### **Ресурсы сети Интернет:**

Книги по математике – URL: <https://obuchalka.org/knigi-po-matematike/>;

Дьяконов В. Свободная матричная система FreeMat. // Компоненты и технологии, № 10 '2013, с. 116–122. – URL: <https://kit-e.ru/wp-content/uploads/147116.pdf>;

FreeMat Documentation Generated by Doxygen 1.8.1.1 Thu Jul 25 2013 17:18:37. – URL: <http://www.dsc.ufcg.edu.br/~icc/Periodo-2017.2/material/FreeMat-4.2.pdf>;

открытые онлайн-курсы.

##### **Информационные справочные системы:**

Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – [http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system](http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system;);

Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>;

#### **4.3. Перечень лицензионного и программного обеспечения**

FreeMat 4.2 для Windows 32/64 бит.–URL:<https://freesoft.ru/windows/freemat/versions/4-2-28251> или <https://sourceforge.net/projects/freemat/files/FreeMat4/>

публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

#### **4.4. Оборудование и технические средства обучения**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Виртуальные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате («Moodle»).

#### **5. Методические указания обучающимся по освоению дисциплины**

Самостоятельная работа студентов по дисциплине организуется в форме самостоятельного изучения основного теоретического материала, ознакомление с дополнительной литературой, Интернет-ресурсами. В качестве учебно-методического обеспечения самостоятельной работы используется основная и дополнительная литература по предмету, Интернет-ресурсы, материал лекций.

#### **6. Преподавательский состав, реализующий дисциплину**

Поддубный Василий Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной информатики ТГУ.

#### **7. Язык преподавания – русский язык.**