

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ  
Директор  
  
А.В. Замятин  
« 16 » июня 20 23 г.

Рабочая программа дисциплины

**Теория вероятностей**

по направлению подготовки / специальности

**10.05.01 Компьютерная безопасность**

Направленность (профиль) подготовки / специализация:  
**Анализ безопасности компьютерных систем**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Специалист по защите информации**

Год приема  
**2023**

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.02.07

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

 В.Н. Тренькаев

Председатель УМК

 С.П. Сущенко

Томск – 2023

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-3 – Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач, формулируемых в рамках базовых математических дисциплин.

ИОПК-3.2 Осуществляет применение основных понятий, фактов, концепций, принципов математики и информатики для решения задач профессиональной деятельности.

ИОПК-3.3 Выявляет научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и применяет соответствующий математический аппарат для их формализации, анализа и выработки решения.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить аппарат теории вероятностей и методологическую базу вероятностного подхода, именно: уметь вычислять вероятности случайных событий, находить числовые характеристики случайных величин, знать формулу полной вероятности, Байеса, законы больших чисел, центральную предельную теорему, основные законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин.

– Научиться применять понятийный аппарат теории вероятностей для решения практических задач профессиональной деятельности, овладеть навыками самостоятельно находить способы решения задач, связанных с анализом случайных явлений.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы. Дисциплина входит в модуль "Математика".

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Четвертый семестр, экзамен

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: «Математический анализ», «Общая алгебра».

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 з.е., 180 часов, из которых:

- лекции: 48 ч.

- практические занятия: 48 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

Тема 1. Основные понятия и формулы теории вероятностей

Модели с конечным числом исходов. Классические модели и распределения. Основные формулы для вероятностей событий. Теорема сложения вероятностей. Независимость

случайных событий. Условная вероятность события. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Тема 2. Простейший закон больших чисел и простейшие предельные теоремы  
Схема Бернулли. Закон больших чисел. Теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона.

Тема 3. Случайные величины, их распределение и числовые характеристики  
Случайные величины как измеримые функции. Функция распределения случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Примеры функций распределения случайных величин, их характеристики, параметры. Плотность распределения вероятностей. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание, его свойства. Дисперсия, её свойства. Преобразование одномерных случайных величин.

Тема 4. Характеристическая функция  
Характеристическая функция и её свойства. Связь моментов случайной величины с её характеристической функцией. Теорема единственности.

Тема 5. Многомерные случайные величины  
Функции распределения многомерных случайных величин, условия согласованности. Математическое ожидание, ковариационная матрица. Условные математические ожидания, основные формулы. Преобразование многомерных случайных величин. Кривые регрессии. Коэффициент корреляции.

Тема 6. Законы больших чисел и предельные теоремы  
Сходимость последовательностей случайных величин почти наверное, в среднеквадратическом, по вероятности, по распределению. Соотношения между различными типами сходимости. Центральная предельная теорема. Условия Линдберга и Ляпунова. Закон больших чисел. Лемма Бореля-Кантелли. Усиленный закон больших чисел. Теоремы Колмогорова и Бореля.

Тема 7. Случайные процессы  
Пуассоновский процесс. Винеровский процесс. Марковские процессы. Марковские цепи. Классификация состояний.

## 9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, проверки практических заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее двух раз в семестр.

Контрольные и практические работы оцениваются по пятибалльной шкале.

## 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в четвертом семестре проводится в письменной форме по билетам. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Типовые экзаменационные билеты имеют следующий вид:

### Экзаменационный билет № 1

1. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
2. Вероятность получения прибыли при заключении сделки равна  $1/2$ . В каком случае вероятнее получить прибыль, заключив  $n$  из  $2n$  сделок или более  $n$  из  $2n$  сделок?
3. Функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  задана формулой  $F(x) = 1 - Ce^{-x^2}$ ,  $x \geq 0$ . Найти:
  - 1) постоянную  $C$ ;
  - 2) плотность распределения  $p(x)$  случайной величины  $X$ ;
  - 3) построить графики  $p(x)$  и  $F(x)$ ;
  - 4) вероятности  $P(X > 0,5)$  и  $P(0,3 < X < 1)$ .

## Экзаменационный билет № 2

1. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин (с помощью характеристических функций).

2. Доказать, что если случайные величины  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$  независимы, положительны и одинаково распределены, то математическое ожидание

$$M \left\{ \frac{X_1 + X_2 - X_3}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7} \right\} = \frac{1}{7}.$$

3. Независимые случайные величины  $X$  и  $Y$  распределены по законам

$$f_1(x) = \frac{1}{3} e^{-x/3}, \quad x \geq 0, \quad f_2(y) = \frac{1}{5} e^{-y/5}, \quad y \geq 0.$$

Найти распределения случайных величин  $Z=X+Y$  и  $W=X-Y$ .

### Примерный перечень теоретических вопросов

1. Описание и аксиоматическое определение случайного события.
2. Операции над событиями.
3. Классическое определение вероятности.
4. Аксиоматическое определение вероятности.
5. Формула полной вероятности.
6. Формула Байеса.
7. Схема Бернулли. Биномиальное распределение.
8. Теоремы Муавра-Лапласа.
9. Теорема Пуассона.
10. Аксиоматическое определение случайных величин и их свойства.
11. Функция распределения вероятностей значений случайной величины и её свойства.
12. Плотность распределения вероятностей значений непрерывной случайной величины и её свойства.
13. Примеры функций распределения случайных величин, их характеристики и параметры.
14. Многомерные случайные величины, их функции распределения, условия согласованности.
15. Условные законы распределения.
16. Преобразование одномерных случайных величин.
17. Преобразование многомерных случайных величин.
18. Математическое ожидание, его свойства.
19. Дисперсия, её свойства.
20. Кривые регрессии. Коэффициент корреляции.
21. Экспоненциальные и гауссовские случайные величины, их свойства.
22. Условное математическое ожидание.
23. Типы сходимостей последовательностей случайных величин.
24. Центральная предельная теорема в простейшей форме. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
25. Центральная предельная теорема в форме Линдберга.
26. Центральная предельная теорема в форме Ляпунова.
27. Закон больших чисел в форме Чебышева и Бернулли.
28. Лемма Бореля-Кантелли – закон нуля и единицы.
29. Теорема сходимости почти наверное, если сходится ряд из абсолютных моментов.
30. Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова.
31. Пуассоновский случайный процесс. Его свойства.
32. Винеровский процесс и его свойства.
33. Марковские процессы. Марковские цепи. Классификация состояний.

Примеры задач для аудиторных занятий по теме «Случайные события. Теоремы суммы и произведения»

- 1 В урне три белых и пять черных шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что эти шары разных цветов?
- 2 При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью  $p$ . Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при  $n$  циклах объект а) будет обнаружен; б) не будет обнаружен; с) хотя бы один раз обнаружен.
- 3 В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 игранных. Для игры выбираются 2 мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются ещё два мяча. Найти вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами.
- 4 В партии из десяти изделий два бракованных. Наудачу выбирают пять изделий. Какова вероятность того, что среди них одно бракованное?
- 5 Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.9. Найти вероятность того, что в результате двух выстрелов будет хотя бы одно попадание.
- 6 Имеется 2 партии изделий. Первая содержит 20 изделий первого сорта и 5 изделий второго сорта, вторая содержит 15 изделий первого сорта и 10 изделий второго сорта. Из каждой партии берут по изделию. Найти вероятность того, что взяты изделия одного сорта.

Примеры задач для аудиторных занятий по теме «Дискретные и непрерывные случайные величины»

- 7 Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0.5, для второго – 0.6.  $X$  – число попаданий в мишень. Требуется для дискретной случайной величины  $X$ : а) найти распределение и функцию распределения; построить графики; б) вычислить  $M(X)$ ,  $D(X)$  и  $\sigma(X)$ , моду  $M_0$ , медиану  $M_e$ ; в) найти вероятность  $P(X < M(X))$ ; г) найти вероятности  $P(X \in [0.9, 2))$ ,  $P(X \in [0.4, 1))$ .

- 8 Дана плотность распределения случайной величины  $X$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ b, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константу  $b$ ; функцию распределения  $F(x)$ , в ответ ввести  $F(1/3)$ ;  $F(1/2)$ ; в)  $M(X)$ ; г)  $D(X)$ ; д)  $P(1/3 < X < 1/2)$ . Начертить графики  $f(x)$ ,  $F(x)$ . Найти моду и медиану распределения.

- 9 Весы для тяжелых предметов считаются годными, если отклонение  $X$  от контрольного веса на более чувствительных весах не превышает 18 г. Величина  $X$  – нормально распределенная и  $M(X)=0$ ,  $D(X)=10$  г. Сколько процентов пригодных весов изготавливает завод? Ответ округлить до целых.
- 10 Из коробки, содержащей 3 синих и 4 красных карандаша, наудачу вынимают 3 карандаша.  $X$  - число красных карандашей среди вынутых. Требуется для дискретной случайной величины  $X$ : а) найти распределение и функцию распределения; построить графики; б) вычислить  $M(X)$ ,  $D(X)$  и  $\sigma(X)$ , моду  $M_0$ , медиану  $M_e$ ; в) найти вероятность  $P(X > M(X))$ ; г) найти вероятности  $P(X \in [1, 3))$ ,  $P(X \in [0.1, 2.5))$ .
- 11 Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2), & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & x < 2, x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) константу  $a$ ; б) функцию распределения  $F(x)$ , в ответ ввести значения  $F(-1/2)$ ,  $F(1/2)$ ; в)  $M(X)$ ; г)  $D(X)$ ; д)  $P(-1/2 < X < 2)$ . Начертить графики  $f(x)$ ,  $F(x)$ . Найти моду и медиану распределения.

- 12 Компоненты изготавливаемого лекарства отвешиваются на весах, ошибка  $X$  которых распределена нормально, причём  $M(X) = 0$ ,  $\sigma(X) = 0.0003$  г. Норма веса лекарства 0.02 г. Определить вероятность отбракования лекарства, если максимально допустимый вес принятого к использованию лекарства 0.021 г.

Примеры задач для аудиторных занятий по теме «Функции от СВ. Системы СВ»

- 13 Найти распределение величины  $Y = aX + b$ , если плотность вероятности СВ  $X$  имеет

вид:  $f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\delta^2}}$ .

- 14 Случайная величина  $\xi$  равномерно распределена в интервале  $(a, b)$ . Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины  $\eta = \xi^2$ .
- 15 Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  принимают значения из множеств  $\{0, 2, -2\}$  и  $\{0, 1, 4\}$  соответственно. Вероятности различных сочетаний даются табл.

$\xi$	-2	-2	-2	0	0	0	2	2	2
$\eta$	0	1	4	0	1	4	0	1	4
$p$	1/16	1/16	1/4	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4

Определить: а) являются ли  $\xi$  и  $\eta$  независимыми? коэффициент корреляции  $r(\xi, \eta)$ ?  
б) Найти законы распределения  $\xi$  и  $\eta$ .

- 16 Найти распределение величины  $Y = e^X$ , плотность вероятности случайной величины  $X$

имеет вид:  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1); \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$

- 17 Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины  $\eta = \xi^2 + 1$ , если  $\xi$  - гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .
- 18 Даны значения независимых случайных величин  $x$  и  $y$  и их вероятности:

$x$	0	3	4
$p$	0,3	0,5	0,2

$y$	1	2
$p$	0,2	0,8

Найти распределения (значения и вероятности) случайной величины  $z = x - y$ . Вычислить среднее значение и дисперсию.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
---------------------	-------------------	--------	---------

Не ответил на основной вопрос. Не решил задачи.	Ответил неполно на основной вопрос и на один - два из трех дополнительных вопросов. Решил одну из двух задач.	Ответил на основной вопрос и на дополнительные вопросы, но с замечаниями. Решил обе задачи.	Уверенно и правильно ответил на все основные и дополнительные вопросы. Решил обе задачи.
---	---	---	--

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=12682>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине (Приложение 1).

в) План практических занятий по дисциплине.

Наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)		Самостоятельная работа (час.)
		Лекции	Практические занятия	
<b>4 семестр</b>				
<b>Теория вероятностей</b>				
Модели с конечным числом исходов. Классические модели и распределения.	8	2	2	4
Основные формулы для вероятностей событий. Теорема сложения вероятностей. Независимость случайных событий. Условная вероятность события. Формула полной вероятности. Формула Байеса.	12	2	4	6
Схема Бернулли. Закон больших чисел. Теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона.	10	4	4	2
Случайные величины как измеримые функции. Функция распределения случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей.	14	4	4	6
Числовые характеристики случайных величин.	14	4	6	4
Характеристическая функция и её свойства. Связь моментов случайной величины с её характеристической функцией	12	4	4	4
Условные математические ожидания, основные формулы.	8	4	2	2
Сходимость последовательностей случайных величин почти наверное, в среднеквадратическом, по вероятности, по распределению. Соотношения между различными типами сходимости.	12	4	4	4
Центральная предельная теорема. Условия Линдберга и Ляпунова.	8	4	2	2
Закон больших чисел. Лемма Бореля-Кантелли. Усиленный закон больших чисел. Теоремы Колмогорова и Бореля.	20	10	6	4
Случайные процессы. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс. Марковские процессы.	26	6	10	10
<b>Итого в 4 семестре</b>	<b>144</b>	<b>48</b>	<b>48</b>	<b>48</b>
<b>Промежуточная аттестация в форме экзамена</b>				

## г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа студентов является наиболее продуктивной формой образовательной и познавательной деятельности студента в период обучения. Текущая самостоятельная работа направлена на углубление и закрепление знаний студентов, развитие практических умений.

Обязательными при изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» являются следующие виды самостоятельной работы:

- разбор теоретического материала по пособиям и конспектам лекций;
- самостоятельное изучение указанных теоретических вопросов;
- решение задач по темам практических занятий;
- подготовка и представление докладов на семинарских занятиях;
- подготовка к экзамену.

Контроль самостоятельной работы студентов и качество освоения дисциплины осуществляется посредством:

- опроса студентов при проведении практических занятий;
- проведения коллоквиумов и контрольных работ;
- выполнения студентами самостоятельных домашних работ по вариантам;
- проверки выполнения домашних заданий.

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

### а) основная литература:

- Ширяев А.Н. Вероятность / А.Н. Ширяев – М.: МЦНМО, 2011. – 552 с.
- Боровков А.А. Теория вероятностей / А.А. Боровков – М.: ЛИБРОКОМ, 2018. – 656 с.
- Прохоров А.В. Задачи по теории вероятностей / А.В. Прохоров, В.Г. Ушаков, Н.Г. Ушаков – М.: КДУ, 2009. – 328 с.
- Ширяев А.Н. Задачи по теории вероятностей / А.Н. Ширяев – М.: МЦНМО, 2006. – 416 с.

### б) дополнительная литература:

- Емельянов Г.Р. Задачник по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / В.П. Скитович – М.: Наука, 1970. – 332 с.

## 13. Перечень информационных технологий

### а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint.

### б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
- ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
- Образовательная платформа Юпайт – <https://urait.ru/>
- ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
- ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>



#### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

#### **15. Информация о разработчиках**

Кошкин Геннадий Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ