

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан ММФ ТГУ
Л. В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Квазиконформные отображения

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :
Фундаментальная математика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
П.А. Крылов

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине (примеры тестовых вопросов для текущего контроля СРС).

Устный опрос

- Найти локальные и глобальные характеристики заданного формулой квазиконформного отображения.
- Найти экстремальную длину заданного семейства плоских кривых.
- Выполнение тестов на проверку квазиконформности различных квазиконформных отображений.
- Что такое квазиконформное отображение?
- Как вычисляются характеристики квазиконформного отображения?
- Куда переходят бесконечно малые круги при квазиконформных отображениях?
- Как выглядит уравнение Бельтрами?
- Что такое двойной сингулярный оператор, каковы его свойства?
- Как формулируется теорема о решении уравнения Бельтрами

Вопросы к коллоквиуму:

- Локальное поведение диффеоморфизма.
- Локальные характеристики диффеоморфизмов.
- Определение гладкого квазиконформного отображения.
- Задача Греча.
- Определение экстремальной длины семейства кривых.
- Модули четырехсторонников и двусвязных областей.
- Квазиинвариантность экстремальных длин при квазиконформных отображениях.
- Метод симметрии.
- Принципы композиции.
- Емкости Робена.
- Геометрическое определение квазиконформного отображения.
- Классы отображений с суммируемыми обобщенными производными.
- Класс ACL.
- Аналитические определения квазиконформных отображений, их эквивалентность.

- Эквивалентность аналитических и геометрического определений квазиконформных отображений.
- Три экстремальных задачи о модулях двусвязных областей (Мори, Греча, Тейхмюллера).
- Оценки модулей экстремальных областей с помощью эллиптических функций.
- Теорема Мори.
- Задача о четверке точек.
- М-условие.
- Квазипрямые и квазиокружности, их геометрическая характеристика.
- Квазиконформное отражение относительно кривых.
- Интегральные операторы и их свойства.
- Существование гомеоморфного решения уравнения Бельтрами в случае компактного носителя коэффициента. Общий случай.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в третьем семестре проводится в устной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть - это опрос по формулировкам и определениям. Вторая часть - это теоретический вопрос, проверяющий ИОПК 1.1, ответ на который дается в развернутой форме. Третья часть - это исследовательская задача, проверяющая ИПК 1.1.

Примерный перечень теоретических вопросов.

1. Понятие гладкого квазиконформного отображения.
2. Задача Греча.
3. Пространства Соболева
4. Три экстремальных задачи о модулях двусвязных областей (Мори, Греча, Тейхмюллера)
5. Экстремальная длина, модуль, свойства модулей.
6. Модули четырехсторонников и двусвязных областей.
7. Квазиинвариантность экстремальных длин при квазиконформных отображениях.
8. Метод симметрии.
9. Теорема Мори, ее следствия.
10. Уравнение Бельтрами.
11. Задача о четверке точек.
12. Квазипрямые и квазиокружности, их геометрическая характеристика.
13. Квазиконформное отражение относительно кривых.
14. Интегральные операторы и их свойства.

Примеры задач:

1. Докажите, что не существует K -квазиконформного отображения единичного круга на всю плоскость.
2. Докажите аналог теоремы Каратеодори о граничном соответствии для K -квазиконформных отображений плоских областей.
3. Пусть $f: \Omega \rightarrow D$ - K -квазиконформное отображение жордановой области на единичный круг, удовлетворяющее уравнению Бельтрами $f_{\bar{z}} = \mu(z)f_z$ с условием $|\mu(z)| \leq k < 1$, $z \in \Omega$. Докажите, что такое отображение можно определить, причем единственным образом, если задать некоторую нормировку.
4. Докажите, что отображения f и f^{-1} одновременно K -квазиконформны.

5. Докажите, что композиция K_1 -квазиконформного и K_2 -квазиконформного отображений будет K_1K_2 -квазиконформным отображением.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Итоги текущего контроля выражаются оценкой за работу в семестре и влияют на оценку за экзамен. Оценка за экзамен получается, как среднее арифметическое итоговой оценки текущего контроля и оценки за ответ на экзамене. Ответ на экзамене оценивается следующим образом. Студент получает «отлично», если он успешно, без ошибок отвечает по каждой части билета. «Хорошо» ставится в случае, если ответ верен не менее, чем на 75%, «удовлетворительно» - если ответ верен не менее, чем на 50%. Если студент показывает знание менее 50% билета, то ставится оценка «неудовлетворительно».

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Теоретические вопросы:

- гладкость отображения, квазиконформность, характеристики.
- Эстремальная длина, модуль, свойства модулей.
- пространства Соболева
- геометрическое и аналитическое определение квазиконформности в различных вариантах.
- вспомогательные экстремальные задачи
- формулировка теоремы Мори, ее следствия.
- уравнение Бельтрами
- комплексная дилатация
- свойства сингулярных интегральных операторов

Информация о разработчиках

Садритдинова Гулнора Долимджановна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Колесников Иван Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Копанев Сергей Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ