

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ

Директор института прикладной  
математики и компьютерных наук

А.В. Замятин

« \_\_\_\_\_ » 2023 г.



Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине  
(Оценочные средства по дисциплине)

**Стохастические дифференциальные уравнения**

по направлению подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) подготовки:

**Математические методы в цифровой экономике**

ОС составили:

д-р физ.-мат. наук, профессор,  
профессор кафедры системного анализа и  
математического моделирования

В. А. Васильев

д-р физ.-мат. наук, доцент,  
профессор кафедры системного анализа и  
математического моделирования

Ю. Г. Дмитриев

Рецензент:

д-р физ.-мат. наук, профессор,  
профессор кафедры системного анализа и  
математического моделирования

Г. М. Кошкин

Оценочные средства одобрены на заседании учебно-методической комиссии  
института прикладной математики и компьютерных наук (УМК ИПМКН).

Протокол от 08 июня 2023 г. № 02.

Председатель УМК ИПМКН,  
д-р техн. наук, профессор

С.П. Сущенко

**Оценочные средства (ОС)** являются элементом системы оценивания сформированности компетенций у обучающихся в целом или на определенном этапе ее формирования.

ОС разрабатывается в соответствии с рабочей программой (РП) дисциплины.

### 1. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины

Компетенция	Индикатор компетенции	Код и наименование результатов обучения (планируемые результаты обучения, характеризующие этапы формирования компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
			Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.	ОР-1.1.1. Обучающийся сможет: анализировать и применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	Сформированы систематические знания и способность анализировать и применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	Сформированы, но содержащие отдельные пробелы в знаниях и анализировать и применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	Фрагментарные знания по анализу и применению фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук, и использование их в профессиональной деятельности	Отсутствие знаний по анализу и применению фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук. Использование их в профессиональной деятельности.

	<p>ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.</p>	<p>ОП-1.2.1. Обучающийся сможет выполнять стандартные действия, при решении типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей базовых математических и естественнонаучных дисциплин.</p>	<p>Сформированы систематические знания и способность выполнять стандартные действия, при решении типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей базовых математических и естественнонаучных дисциплин.</p>	<p>Сформированы, но содержащие отдельные пробелы выполнять стандартные действия, при решении типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей базовых математических и естественнонаучных дисциплин</p>	<p>Фрагментарные знания по выполнению стандартных действий, при решении типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей базовых математических и естественнонаучных дисциплин</p>	<p>Отсутствуют знания по выполнению стандартных действий, при решении типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей базовых математических и естественнонаучных дисциплин</p>
--	---	--	---	--	---	---

	<p>ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.</p>	<p>ОР-1.3.1. Обучающийся сможет использовать основные понятия, факты, концепции, принципы математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.</p>	<p>Сформированы систематические знания по использованию основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.</p>	<p>Сформированы , но содержащие отдельные пробелы в знаниях по использованию основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач.</p>	<p>Фрагментарны е знания по использованию основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.</p>	<p>Отсутствуют знания по использованию основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.</p>
--	---	--	---	---	---	--

	<p>ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.</p>	<p>ОП-1.4.1. Обучающийся умеет понимать и применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.</p>	<p>Сформированы систематические знания по применению на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.</p>	<p>Сформированы, но содержащие отдельные пробелы в знаниях по применению на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.</p>	<p>Фрагментарные знания по применению на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.</p>	<p>Отсутствуют знания по применению на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности..</p>
--	--	--	--	--	---	--

<p>ОПК-2 – Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач.</p>	<p>ИОПК-2.3. Демонстрирует умение отбора среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи.</p>	<p>ОР-2.3.1. Обучающийся умеет отбирать среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи, адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач</p>	<p>Сформированы систематические знания по отбору среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи, адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач.</p>	<p>Сформированы , но содержащие отдельные пробелы в знаниях по отбору среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи, адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач..</p>	<p>Фрагментарны е знания по отбору среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи, адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач..</p>	<p>Отсутствуют знания по отбору среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи, адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач...</p>
--	---	---	---	---	--	--

<p>ОПК-3 – Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.</p>	<p>ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.</p>	<p>ОР-3.1.1. Обучающийся умеет применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.</p>	<p>Сформированы систематические знания по применению современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.</p>	<p>Сформированы , но содержащие отдельные пробелы в знаниях по применению современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.</p>	<p>Фрагментарны е знания по применению современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.</p>	<p>Отсутствуют знания по применению на современном математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области...</p>
---	---	--	---	--	---	--



	<p>ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.</p>	<p>ОР-3.2.1. Обучающийся умеет собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.</p>	<p>Сформированы систематические знания по сбору и обработке статистических, экспериментальных, теоретических и т.п. данных для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.</p>	<p>Сформированы, но содержащие отдельные пробелы в знаниях по сбору и обработке статистических, экспериментальных, теоретических и т.п. данных для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.</p>	<p>Фрагментарные знания по сбору и обработке статистических, экспериментальных, теоретических и т.п. данных для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.</p>	<p>Отсутствуют знания по сбору и обработке статистических, экспериментальных, теоретических и т.п. данных для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.</p>
	<p>ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.</p>	<p>ОР-3.3.1. Обучающийся умеет критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.</p>	<p>Сформированы систематические знания по умению модификации разрабатываемой математической модели.</p>	<p>Сформированы, но содержащие отдельные пробелы в умении модифицировать разрабатываемые математические модели.</p>	<p>Фрагментарные знания по умению модификации разрабатываемой математической модели.</p>	<p>Отсутствуют знания по умению модификации разрабатываемой математической модели.</p>

<p>ПК-1 – Способен осуществлять научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки как по отдельным разделам темы, так и при исследовании самостоятельных тем.</p>	<p>ИПК-1.1. Осуществляет проведение работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований.</p>	<p>ОП-1.1.1. Обучающийся умеет проводить работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований, осуществлять научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки как по отдельным разделам темы, так и при исследовании самостоятельных тем</p>	<p>Сформированы систематические знания по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований, осуществлять научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки как по отдельным разделам темы, так и при исследовании самостоятельных тем.</p>	<p>Сформированы, но содержащие отдельные пробелы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований, осуществлять научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки как по отдельным разделам темы, так и при исследовании самостоятельных тем.</p>	<p>Фрагментарные знания по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований, осуществлять научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки как по отдельным разделам темы, так и при исследовании самостоятельных тем..</p>	<p>Отсутствуют знания по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований, осуществлять научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки как по отдельным разделам темы, так и при исследовании самостоятельных тем..</p>
--	--	---	---	---	---	---

## 2. Этапы формирования компетенций и виды оценочных средств

№	Этапы формирования компетенций (разделы дисциплины)	Код и наименование результатов обучения	Вид оценочного средства (тесты, задания, кейсы, вопросы и др.)
1.	Тема 1. Стохастические процессы, используемые при моделировании динамических систем с дискретным и непрерывным временем	ОР-3.2.1, ОР-3.2.2	Вопросы и задания
2.	Тема 2. Гауссовские и условно-гауссовские модели	ОР-3.2.3, ОР-3.2.4, ОР-3.2.5	Вопросы и задания
3	Тема 3. Модели скользящего среднего, авторегрессии. Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего, авторегрессионная модель условной неоднородности	ОР-3.2.3, ОР-3.2.4, ОР-3.2.5, ОР-3.2.7	Вопросы и задания
4	Тема 4. Модели, основанные на броуновском движении. Разложение броуновского движения на основе теоремы Каруннена-Лоэва.	ОР-3.2.3, ОР-3.2.4, ОР-3.2.5, ОР-3.2.6	Вопросы и задания
5	Тема 5. Стохастический интеграл по броуновскому движению. Формула Ито.	ОР-3.2.1, ОР-3.2.2	Вопросы и задания
6	Тема 6. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с дискретным и непрерывным временем.	ОР-3.2.3, ОР-3.2.4, ОР-3.2.5	Вопросы и задания
7	Тема 7. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с дискретным и непрерывным временем.	ОР-3.2.3, ОР-3.2.4, ОР-3.2.5, ОР-3.2.7	Вопросы и задания
8	Тема 8. Оценивание параметров распределений с тяжелыми хвостами, используемых в финансовой математике, методом усеченного оценивания.	ОР-3.2.1, ОР-3.2.2	Вопросы и задания

### 3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки образовательных результатов обучения

#### 3.1. Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине

##### Список задач для проведения контрольной работы:

1. Доказать, что следующая система множеств является сигма алгеброй:
  - a. Тривиальная сигма-алгебра;
  - b. Сигма-алгебра, порожденная множеством;
  - c. Множество всех подмножеств (булеан).
2. Найти мощность булеана, построенного на основе множества, состоящего из  $N$  элементов.
3. Доказать мартингальность/субмартингальность следующих процессов:
  - a.  $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$ , где  $\{X(i)\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним;
  - b.  $Y(n)=X(1)*\dots*X(n)$  где  $\{X(i)\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием равным единице;
  - c.  $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$  где  $\{X(i)\}$  – последовательность независимых положительно определенных случайных величин с существующим первым моментом.

4. Используя неравенство Чебышева обосновать правило трех сигм для случайной величины с существующим вторым моментом.
5. Получить верхнюю границу для ковариации двух случайных величин, используя неравенство Коши-Буняковского.
6. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариацию процесса скользящего среднего порядка  $q$ .
7. Получить представление процесса авторегрессии первого порядка  $AR(1)$  через его шум.
8. Найти дисперсию процесса  $AR(1)$ .
9. Получить оценки МНК и ММП для параметра гауссовского процесса  $AR(1)$ .
10. Получить МНК-оценку для  $ARCH(1)$  процесса.

**Примеры билетов на контрольной работе:**

**БИЛЕТ N 1**

1. Стохастический интеграл Ито
2. Доказать, что следующая система множеств является сигма алгеброй:
  - a. Тривиальная сигма-алгебра;
  - b. Сигма-алгебра, порожденная множеством;
  - c. Множество всех подмножеств (булеан).
3. Найти мощность булеана, построенного на основе множества, состоящего из  $N$  элементов.

**БИЛЕТ N 2**

1. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с непрерывным временем
2. Доказать мартингальность/субмартингальность следующих процессов:
  - a.  $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$ , где  $\{X(i)\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним;
  - b.  $Y(n)=X(1)*\dots*X(n)$  где  $\{X(i)\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием равным единице;
  - c.  $Y(n)=X(1)+\dots+X(n)$  где  $\{X(i)\}$  – последовательность независимых положительно определенных случайных величин с существующим первым моментом.
3. Используя неравенство Чебышева, обосновать правило трех сигм для случайной величины с существующим вторым моментом.

**БИЛЕТ N 3**

1. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем
2. Получить верхнюю границу для ковариации двух случайных величин, используя неравенство Коши-Буняковского.
3. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариацию процесса скользящего среднего порядка  $q$ .

**БИЛЕТ N 4**

1. Модели  $(B,S)$  рынка
2. Получить представление процесса авторегрессии первого порядка  $AR(1)$  через его шум.
3. Найти дисперсию процесса  $AR(1)$ .

**БИЛЕТ N 5**

1. Задачи финансовой математики для распределений с тяжелыми хвостами
2. Получить оценки МНК и ММП для параметра гауссовского процесса  $AR(1)$ .
3. Получить МНК-оценку для  $ARCH(1)$  процесса

### **3.2. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине**

#### **Примерный перечень экзаменационных вопросов:**

1. Стохастические процессы, используемые при моделировании динамических систем с дискретным временем
2. Стохастические процессы, используемые при моделировании динамических систем с непрерывным временем
3. Гауссовские модели
4. Условно-гауссовские модели
5. Модели скользящего среднего
6. Модели авторегрессии
7. Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего
8. Авторегрессионная модель условной неоднородности
9. Разложение броуновского движения на основе теоремы Каруннена-Лоэва
10. Стохастический интеграл Ито.
11. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем
12. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с непрерывным временем
13. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем.
14. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с непрерывным временем
15. Оценивание параметров распределений с тяжелыми хвостами

#### **Примеры экзаменационных билетов:**

##### **Экзаменационный билет № 1**

1. Стохастический интеграл Ито
2. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с непрерывным временем
3. Оценивание параметров распределений с тяжелыми хвостами

##### **Экзаменационный билет № 2**

1. Метод усеченного оценивания в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем
2. Авторегрессионная модель условной неоднородности
3. Гауссовские модели

##### **Экзаменационный билет № 3**

1. Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего
2. Разложение броуновского движения на основе теоремы Каруннена-Лоэва
3. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем

##### **Экзаменационный билет № 4**

1. Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего
2. Разложение броуновского движения на основе теоремы Каруннена-Лоэва
3. Последовательный анализ в задачах идентификации динамических систем с дискретным временем

#### **4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов обучения**

##### **4.1. Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.**

Текущий контроль успеваемости осуществляется выполнением контрольной работы, которая состоит в письменных ответах на три задания билета (один теоретический вопрос и две практические задачи). Критерии оценивания результатов текущей успеваемости следующие:

Оценка «отлично» ставится при полных ответах на все вопросы билета.

Оценка «хорошо» ставится при полных ответах на вопросы билета кроме одного (любого) вопроса.

Оценка «удовлетворительно» ставится при полных ответах на вопросы билета кроме двух (любых) вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» ставится при не ответах на все вопросы билета.

##### **4.2. Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.**

Критерии оценивания результатов обучения промежуточной аттестации:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится при полных ответах на все вопросы экзаменационного билета.

Оценка «хорошо» ставится при полных ответах на вопросы экзаменационного билета кроме одного (любого) вопроса.

Оценка «удовлетворительно» ставится при полных ответах на вопросы экзаменационного билета кроме двух (любых) вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» ставится при не ответах на все вопросы экзаменационного билета.