

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан



Л. В. Гензе

« 20 » 06 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

**Топологические группы**

по направлению подготовки

**01.04.01 Математика**

Направленность (профиль) подготовки :

**Фундаментальная математика**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Магистр**

Год приема

**2022**

Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.3.ДВ.02.04

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП



П. А. Крылов

Председатель УМК



Е. А. Тарасов

Томск – 2022

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Усвоение обучающимися терминологии, основных конструкций и фактов теории топологических групп (ТГ) (ИОПК 1.1).

– Усвоение обучающимися концепции ТГ, уяснение влияния групповой структуры на топологические свойства пространства (ИПК 1.1).

– Ознакомление обучающихся с сутью открытых проблем теории ТГ (ИПК 1.1).

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Первый семестр, зачет с оценкой

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуется знание основ алгебры, общей топологии и топологических векторных пространств.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часов, из которых:

-лекции: 16 ч.

-практические занятия: 16 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

Тема 1. Определение и примеры топологических групп (ТГ) (ИОПК 1.1, ИПК 1.1)

Тема 2. Условия Понтрягина – Вейля (ИОПК 1.1, ИПК 1.1)

Тема 3. Основные операции над ТГ (ИОПК 1.1, ИПК 1.1)

Тема 4. Преднормы на ТГ. Критерий метризуемости (ИОПК 1.1, ИПК 1.1)

Тема 5.  $\omega$ -тонкие и  $\omega$ -уравновешенные ТГ. Теоремы Гурана и Каца (ИОПК 1.1, ИПК 1.1)

Тема 6. Топологические группы изометрий и гомеоморфизмов (ИОПК 1.1, ИПК 1.1)

Тема 7. Диадичность пространства ТГ (ИОПК 1.1, ИПК 1.1)

## Тема 8. О кардинальных инвариантах ТГ (ИОПК 1.1, ИПК 1.1)

### 9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, выступления обучающихся с докладами по избранным вопросам курса (ИОПК 1.1) и по решениям домашних задач (ИПК 1.1), и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

### 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет с оценкой в первом семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос (проверка сформированности ИПК 1.1) и задачу (проверка сформированности ИОПК 1.1).

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Определение топологической группы. Теорема об условиях Понтрягина-Вейля.
2. Топологическая подгруппа. Теорема о замкнутости открытой подгруппы. Теорема об альтернативе для подгруппы аддитивной группы вещественных чисел.
3. Факторгруппа. Теорема о топологизации факторгруппы.
4. Инвариантные подгруппы топологических групп. Теоремы о компоненте единицы.
5. Условия существования и схема построения инвариантной псевдометрики на топологической группе.
6. Критерий метризуемости топологической группы.
7. Теорема о вполне регулярности топологической группы.
8. Пример не нормальной топологической  $T_0$ -группы.
9. Основные свойства  $\omega$ -узких групп (доказать два из них на выбор).
10. Основные свойства  $\omega$ -уравновешенных групп (доказать два из них на выбор).
11. Теорема Каца.
12. Теорема Гурана.
13. Теорема Ивановского – Кузьминова (схема построения отображения).
14. Условия существования и схема построения инвариантного интеграла на пространстве  $C(G)$ .
15. Скалярное произведение в  $C(G)$ . Теорема о мощности ортогональной системы.
16. Индекс узости топологической группы. Его свойства. Теорема о связи индекса узости и веса топологической группы.
17. Теоремы о верхних оценках для  $i$ -веса и сетевого веса топологической группы.
18. Теоремы о совпадении веса с  $\pi$ -весом и характера с  $\pi$ -характером топологической группы.

Примеры задач:

1. Доказать, что каждый сдвиг – это гомеоморфизм ТГ.
2. Доказать, что если подгруппа в  $\mathbb{R}$  не всюду плотна, то это  $a\mathbb{Z}$ .

Результаты зачета с оценкой выражаются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

При посещении всех лекций и практических занятий, и при неоднократных успешных выступлениях с докладами по результатам домашней работы, студенту может быть выставлена оценка «отлично» или «хорошо» без сдачи зачёта.

На зачёте оценка «отлично» выставляется за знание и правильное употребление терминов и определений теории топологических групп, за проявленное понимание формулировки и доказательства теоремы при ответе на теоретический вопрос, за верные ответы на уточняющие и дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется по такому же критерию, если выявляются фрагментарные пробелы во владении понятийным аппаратом, или в доказательстве теоремы.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если при ответе на теоретический вопрос выявлено владение материалом курса, не выходящее за рамки самых основных определений и формулировок, без способности доказать сформулированную теорему.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если ответ студента не удовлетворяет сформулированным выше условиям.

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=13056>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) Настоящая рабочая программа дисциплины.

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Arhangel'skii A. V., Tkachenko M. G. Topological Groups and Related Structures. Atlantis Press / World Scientific, 2008

2. Моррис С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп. М.: Мир, 1980

б) дополнительная литература:

1. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. т.1. М.: Наука, 1975

2. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. Избр. научн. труды. Т.3. М.: Наука, 1988

3. Архангельский А. В. О соотношениях между инвариантами топологических групп и их подпространств. // УМН. 1980. т. 35, № 3 с. 3 – 22.

в) ресурсы сети Интернет:

«Вестник Томского государственного университета. Математика и механика»  
<http://journals.tsu.ru/mathematics/>

## 13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ –  
<http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –  
<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

## 14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

### **15. Информация о разработчиках**

Лазарев Вадим Ремирович, кандидат ф.-м. наук, кафедра математического анализа и теории функций, доцент.