Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан ММФ ТГУ
Л. В.Гензе

Рабочая программа дисциплины

Пространства непрерывных функций

по направлению подготовки

01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки :
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-4 Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.

ОПК-8 Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики, механики, компьютерных наук и информатики.

ПК-1 Способен проводить научно-исследовательские разработки по отдельным разделам выбранной темы.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 4.1 Проводит поиск и обработку научной и научно-технической информации, необходимой для решения исследовательских задач

ИОПК 4.2 Оценивает полученные результаты и формулирует выводы по итогам проведенных исследований

ИОПК 8.1 Демонстрирует способность подготовить конспект или план занятия по теме из области математики, механики, компьютерных наук или информатики.

ИОПК 8.2 Выбирает подходящие источники информации для подготовки конспекта или плана занятия по выбранной теме.

ИПК 1.1 Проводит работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований

ИПК 1.2 Подготавливает планы и программы проведения отдельных этапов научно-исследовательской работы

ИПК 1.3 Проводит отдельные этапы научно-исследовательской работы

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить раздел функционального анализа, относящийся к геометрической теории банаховых пространств, изучить алгебраические и топологические свойства пространств непрерывных функций с различными типами сходимости.

– Научиться применять понятийный аппарат и методы теории банаховых пространств для решения научных и практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Седьмой семестр, зачет с оценкой

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: математический анализ, топология, алгебра, теория множеств, геометрия.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.
-практические занятия: 32 ч.
в том числе практическая подготовка: 64 ч.
Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Банаховы пространства непрерывных функций на метрических компактах.

1. Вполне упорядоченные топологические пространства.
2. Счётные метризуемые компакты. Теорема Серпинского.
3. Пространства непрерывных функций на счётных компактах.
4. Пространства непрерывных функций на несчётных метрических компактах. Теорема Милютина. Универсальность пространства C[0,1].
5. Пространства непрерывных функций на вполне упорядоченных компактах. Теорема Семадени.

Тема 2. Слабые топологии.

1. Слабые* топологии в сопряжённых пространствах. Теорема Алаоглу.
2. Слабые топологии. Метризуемость, компактность. Теорема Эберлейна-Шмульяна.
3. Выпуклые множества. Слабо сходящиеся последовательности, теорема Мазура.
4. Теорема Голдстайна.

Тема 3. Пространства функций в топологии поточечной сходимости.

1. Определение топологии поточечной сходимости. Вес, сепарабельность, σ-компактность, первая аксиома счетности в пространстве $C_p(X)$.
2. Топологическое сопряжённое к $C_p(X)$.
3. Определение носителя при линейном непрерывном отображении пространства $C_p(X)$ на пространство $C_p(Y)$.
4. Определение l- эквивалентности топологических пространств X и Y. Свойства пространств X и Y, сохраняющиеся при l-эквивалентности.
5. Определение t- эквивалентности топологических пространств X и Y. Свойства пространств X и Y, сохраняющиеся при t-эквивалентности.
6. Линейная гомеоморфная классификация пространств $C_p(X)$ для счётных компактов X.
7. Несуществование линейного гомеоморфизма между пространствами C[0,1] и C(K) для канторова множества K.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, тестов по лекционному материалу, выполнения домашних заданий, включающих самостоятельный разбор доказательств некоторых теорем, выполнения индивидуальных заданий по решению задач и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет с оценкой в седьмом семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос и две задачи. Продолжительность зачета 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов.

1. Вполне упорядоченные множества. Свойства.
2. Порядковые числа. Операции сложения и умножения порядковых чисел.
3. Разложение порядковых чисел по произвольному основанию.
4. Гомеоморфность счётных компактов и отрезков ординалов.
5. Порядковая топология. Компактность отрезков порядковых чисел.
6. Пространства непрерывных функций на отрезках ординалов. Изоморфная классификация.
7. Пространства функций на несчётных отрезках ординалов.
8. Несчётные метрические компакты. Точки конденсации. Теорема Кантора-Бендиксона.
9. Операторы продолжения и усреднения. Операторы проектирования.
10. Теорема Милютина.
11. Изоморфизм пространств C[0,1] и C(K) для несчётного метрического компакта K.
12. Слабая и слабая* топология в банаховых пространствах. Сравнение с нормированной топологией.
13. Компактные множества в нормированой и слабой* топологии.
14. Теорема Алаоглу.
15. Теорема Голдстайна.
16. Метризуемость ограниченных множеств в слабой топологии.$\mathbb{R}$
17. Сходимость последовательностей в слабой топологии. Теорема Мазура.
18. Пространства непрерывных функций в топологии поточечной сходимости. Основные свойства: вес, плотность , сепарабельность, σ-компактность.
19. Пространство линейных ограниченных функционалов.
20. Свойства, сохраняющиеся l-эквивалентностью.
21. Свойства, сохраняющиеся t-эквивалентностью

Примеры задач:

1. Является ли множество $\mathbb{Q}$:

a) линейно упорядоченным;
b) вполне упорядоченным;
c) частично упорядоченным;
d) плотным;
e) разреженным.

2. Является ли множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

a) линейно упорядоченным;
b) вполне упорядоченным;
c) частично упорядоченным;
d) плотным;
e) разреженным.

3. Верно ли следующее равенство: $\eta + \eta = \eta$.

4. $\omega + 1 + \omega = \omega$.

5. Чему равна производная множества: $\left[1, \omega^3\right]^{(2)}$.

6. Чему равна производная множества: $\left[\omega^3 + 1, \omega^4 \cdot 2 + \omega^3 \cdot 3\right]^{(4)}$.

7. Гомеоморфны ли следующие пространства: $\left[1, \omega^3 + \omega^2\right]$ и $\left[1, \omega^3\right]$.

8. Гомеоморфны ли следующие пространства: $\left[1,\omega^2\right.$ и $\coprod\limits_{n=1}^{\infty} 1,\omega\cdot n$.

9. Изоморфны ли нормированные пространства: c и $C\left[1,\omega^2\right]$.

10. Изоморфны ли нормированные пространства: $C\left[1,\omega_1\right]$ и $C\left[1,\omega_1+\omega\right]$.

11. Изоморфны ли нормированные пространства: $C\left[1,\omega_1\right]$ и $C\left[1,\omega_1\cdot 2\right]$

12. Является ли единичный шар пространства C[0,1] компактным в а) нормированной топологии, б) слабой топологии?

13. Является ли единичный шар пространства C[0,1] метризуемым в слабой топологии?

14. Доказать, что единичный шар в пространстве ℓ_2 является метризуемым и компактным в слабой топологии

15. Доказать, чтоо проостранство c_0 плотно в пространстве ℓ_∞ в слабой* топологии.

16. Имеет ли пространство $C_p[0,1]$ счетную базу? Является ли это пространство сепарабельным?

17. Является ли σ-компактным пространство $C_p[0,\omega]$?

18. Гомеоморфны ли пространства $C_p[0,\omega_1)$ и $C_p[0,\omega_1]$?

Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится за правильно решенные задачи, правильный ответ на теоретический вопрос и выполненные индивидуальные задания в семестре. При невыполнении индивидуальных заданий в семестре оценка отлично может быть выставлена, если на зачёте будут решены дополнительно две или три задачи.

Оценка «хорошо» предполагает выполнение индивидуальных заданий в семестре, решение одной из двух задач и ответ на теоретический вопрос, вовможно с погрешностями в доказательстве.

Оценка «удовлетворительно» ставится за ответ на один из трёх вопросов и выполнение индивидуальных заданий в семестре.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=33783

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1.Архангельский А.В., Топологические пространства функций. Изд-во московского университета, 1989, 224 с.

2 .Энгелькинг Р., Общая топология. Изд-во Мир,1986, 752 с.

3. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. Изд-во Наука, 1977, 268 с.

4. Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств. Изд-во Мир, 1970, 416 с.

5. Fabian M. et al. Functional analysis and infinite-dimensional geometry. – Springer Science & Business Media, 2013

6. Порошкин А.Г. Лекции по функциональному анализу. Москва: Вузовская книга, 2007. 431 с.

б) дополнительная литература:

1. Vladimir V. Tkachuk. A Cp-Theory Problem Book. Functional Equivalencies. Springer, 2016, 727 с.
2. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 448 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962. - 896 с.

13. Перечень информационных технологий

а) информационные справочные системы:
– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system
– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index
– ЭБС Лань – http://e.lanbook.com/

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

15. Информация о разработчиках

Гулько Сергей Порфирьевич, профессор, доктор физ-мат наук, ТГУ, профессор.
Хмылёва Татьяна Евгеньевна, доцент, канд. физ.-мат. наук, ТГУ, доцент.