

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:

Директор

А. В. Замятин

« 14 » сентября 20 23 г.

Рабочая программа дисциплины

**Математический анализ**

по направлению подготовки

**02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии**

Направленность (профиль) подготовки:

**Искусственный интеллект и разработка программных продуктов**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Бакалавр**

Год приема

**2023**

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.02.03

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

А. В. Замятин

Председатель УМК

С. П. Сущенко

Томск – 2023

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК-1 – способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук.

ИОПК-1.2. Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности.

ИОПК-1.3. Обладает необходимыми знаниями для исследования информационных систем и их компонент.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить аппарат математического анализа и математические методы при моделировании, анализе, управлении систем.

– Научиться применять понятийный аппарат математического анализа, связанные с информатикой, для решения практических задач профессиональной деятельности.

– Научиться применять важнейшие математические методы к решению типовых профессиональных задач

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы. Дисциплина входит в модуль «Математика».

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Второй семестр, экзамен

Третий семестр, экзамен

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: алгебра и геометрия, дискретная математика.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 14 з.е., 504 часов, из которых:

-лекции: 128 ч.

-практические занятия: 128 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

### **Раздел 1. Теория пределов.**

Тема 1. Теория множеств.

Понятие множества. Операции над множествами. Сравнение множеств. Счетность множества рациональных чисел. Вещественные числа. Супремум и инфимум числовых множеств.

Тема 2. Последовательность, предел последовательности.

Определение предела последовательности. Геометрическая интерпретация предела последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства. Лемма о вложенных отрезках. Число  $\varepsilon$ . Признак Больцано-Коши для последовательностей.

Тема 3. Предел функции.

Понятие функции и способы ее задания. Определение и свойства предела функции. Предел монотонной функции. Признак Больцано-Коши для функции. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых величин.

## **Раздел 2. Непрерывность функции.**

Тема 1. Определение непрерывности функции. Типы разрывов функции.

Основные определения непрерывной функции. Классификация точек разрыва функции. Свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной функции.

Тема 2. Обратная функция.

Монотонные функции. Определение обратной функции. Теорема о существовании обратной функции у монотонной функции. Непрерывность элементарных функций.

Тема 3. Замечательные пределы и следствия из них.

Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Типы неопределенных выражений. Использование замечательных пределов при раскрытии неопределенностей.

## **Раздел 3. Производная и ее применение.**

Тема 1. Понятие производной функции. Таблица производных.

Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной и ее геометрический смысл. Алгебра производных, таблица производных. Особые случаи.

Тема 2. Теоремы о функциях, имеющих производную.

Теорема Ферма, теорема Ролля, теоремы Вейерштрасса. Формула Коши. Формула Лагранжа.

Тема 3. Дифференциал. Производные высших порядков.

Понятие дифференциала и его геометрический смысл. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции, связь дифференциала и производной. Правила дифференцирования. Производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Производные от параметрически заданных функций.

Тема 4. Формула Тейлора.

Формула Тейлора для полинома. Формула Тейлора для функции, свойства остаточного члена. Остаточный член в форме Пеано, остаточный член в форме Лагранжа. Разложение в ряд Тейлора функций.

Тема 5. Применение производной.

Правило Лопиталю для раскрытия неопределенностей. Условие постоянства и монотонности функции. Определение локального и глобального экстремума функции, необходимое и достаточное условия экстремума. Схема исследования функции на экстремум. Выпуклые и вогнутые функции, вид их графика и свойства. Неравенство Иенсена. Связь выпуклости с поведением производной и видом ее графика по отношению к касательной. Точки перегиба, необходимые и достаточные условия точки перегиба. Схема исследования функции на выпуклость – вогнутость. Асимптоты. План полного исследования функции и построения ее графика.

## **Раздел 4. Интегралы: неопределенные, определенные, несобственные. Применение интегрального исчисления для решения прикладных задач.**

Тема 1. Неопределенный интеграл.

Первообразная, неопределенный интеграл его свойства. Таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование. Замена переменных, интегрирование по частям. Интегрирование дробно-рациональных функций. Интегралы от тригонометрических функций. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

Тема 2. Определенный интеграл.

Понятие определенного интеграла. Свойства интегрируемых функций. Формула Ньютона-Лейбница. Использование определенного интеграла для решения геометрических, физических, экономических задач.

Тема 3. Несобственный интеграл.

Несобственный интеграл первого рода, признаки сходимости. Несобственный интеграл второго рода, признаки сходимости.

### **Раздел 5. Числовые ряды.**

Тема 1. Определение числового ряда. Понятие сходимости числового ряда.

Определение числового ряда. Сумма ряда. Определение сходимости и расходимости числового ряда. Свойства сходящихся рядов.

Тема 2. Признаки сходимости рядов с положительными членами.

Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши. Сходимость гармонического ряда и признак сходимости Раабе. Интегральный признак Коши.

Тема 3. Знакопеременные ряды.

Определение знакопеременного (знакопеременяющегося) ряда. Признак Лейбница. Оценка остатка знакопеременного ряда. Сходимость рядов с произвольными слагаемыми. Признак сходимости Больцано-Коши. Признак Дирихле. Признак Абеля. Теорема Римана. Умножение рядов. Двойные ряды. Бесконечные произведения – определение, свойства. Сходимость бесконечных произведений.

### **Раздел 6. Функции многих переменных.**

Тема 1. Понятие функции многих переменных. Передел функции многих переменных.

Многомерные параллелепипеды и шары. Функции многих переменных. Предел функции многих переменных. Повторные пределы, теорема об их равенстве.

Тема 2. Дифференцирование функций многих переменных.

Частные производные, градиент. Полное приращение и дифференциал функции многих переменных. Теоремы, дающие необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции. Производная от сложной функции. Производная по направлению, ее связь с градиентом. Производные от неявных функций. Производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Ряд Тейлора функции многих переменных.

Тема 3. Экстремум функции многих переменных.

Безусловный экстремум функции многих переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума функции многих переменных. Условный экстремум и метод Лагранжа.

### **Раздел 7. Криволинейные, кратные и поверхностные интегралы.**

Тема 1. Криволинейные интегралы.

Криволинейные интегралы первого рода – определение, вычисление. Приложение криволинейных интегралов первого рода. Криволинейные интегралы второго рода – определение, вычисление, векторная форма записи, физический смысл, связь с криволинейными интегралами первого рода. Независимость криволинейных интегралов от пути (плоский случай).

Тема 2. Двойные интегралы.

Двойные интегралы – определение, свойства. Вычисление двойных интегралов по прямоугольной области и по криволинейной трапеции. Перестановка интегралов в повторном интеграле. Формула Грина. Замена переменных в двойных интегралах. Приложения двойного интеграла.

Тема 3. Тройные интегралы.

Тройной интеграл - определение, вычисление. Формула Остроградского-Гаусса. Замена переменных в тройных интегралах. Приложения тройного интеграла.

Тема 4. Поверхностные интегралы.

Поверхностный интеграл первого рода – определение, вычисление. Поверхностный интеграл второго рода – определение, вычисление. Элементы теории поля: градиент, дивергенция, ротор, их свойства, поток и циркуляция векторного поля.

### **Раздел 8. Теория функции комплексного переменного.**

Тема 1. Понятие функции комплексного переменного. Производная и интеграл функции комплексного переменного.

Производная функции комплексного переменного, ее геометрический смысл. Интеграл от функции комплексного переменного, Интегральная формула Коши. Формула Коши для высших производных.

Тема 2. Степенные ряды.

Функциональные ряды. Сходимость функциональных рядов. Почленное интегрирование и дифференцирование функционального ряда. Степенные ряды. Нахождение области сходимости и радиуса сходимости степенного ряда.

Тема 3. Теория вычетов.

Особые точки аналитических функций. Определение вычета. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Тема 4. Преобразование Лапласа и Фурье.

Преобразование Лапласа – определение, формула обращения, свойства. Применение преобразования Лапласа. Преобразование Фурье – определение, формула обращения, свойства. Применение преобразования Лапласа.

## **9. Текущий контроль по дисциплине**

Текущий контроль по дисциплине проводится путем проведения контрольных работ, коллоквиумов по лекционному материалу, выполнения домашних заданий, контроля посещаемости и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

## **10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации**

Экзамен во втором и третьем семестрах проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из двух частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть представляет собой два вопроса по теоретическому материалу, проверяющих ИОПК-1.1, ИОПК-1.2. Ответы на вопросы первой части даются в развернутой форме.

Вторая часть содержит два вопроса, проверяющих ИОПК-1.2, ИОПК-1.3, оформленные в виде практических задач. Ответ на вопросы второй части предполагает решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Вопрос 1. Множества. Сравнение множеств по числу элементов. Супремум и инфимум, свойства.

2. Вопрос 2. Определение предела последовательности. Бесконечно малые последовательности, свойства бесконечно малых последовательностей. Теоремы о пределе монотонной последовательности.

3. Вопрос 3. Предел функции. Определение.

4. Вопрос 4. Признак Больцано-Коши для функции.

5. Вопрос 5. Сравнение бесконечно больших величин и бесконечно малых величин.

6. Вопрос 6. Связь понятий непрерывности и предела функции.

7. Вопрос 7. Типы разрывов.

8. Вопрос 8. Обратная функция, теорема о существовании и монотонности обратной функции.
9. Вопрос 9. Замечательные пределы (с доказательством).
10. Вопрос 10. Типы неопределенных выражений.
11. Вопрос 11. Особые случаи производных.
12. Вопрос 12. Формулы Коши и Лагранжа.
13. Вопрос 13. Дифференциал, теорема и дифференцируемости функции.
14. Вопрос 14. Разложение функций в ряд Тейлора.
15. Вопрос 15. Связь понятия выпуклости с касательной и производной.
16. Вопрос 16. Неопределенный интеграл, определение.
17. Вопрос 17. Приемы интегрирования: подведение под знак дифференциала, замена переменной, интегрирование по частям.
18. Вопрос 18. Метод неопределенных коэффициентов, интегрирование рациональных дробей.
19. Вопрос 19. Подстановки Эйлера.
20. Вопрос 20. Интегрирование тригонометрических функций.
21. Вопрос 21. Суммы Дарбу. Свойства сумм Дарбу.
22. Вопрос 22. Свойства определенных интегралов с доказательством.
23. Вопрос 23. Длина дуги плоской кривой, определение и вычисление.
24. Вопрос 24. Вычисление площадей.
25. Вопрос 25. Объем тела вращения.
26. Вопрос 26. Несобственные интегралы первого рода, практический признак сходимости несобственных интегралов первого рода.
27. Вопрос 27. Несобственные интегралы второго рода, практический признак сходимости несобственных интегралов второго рода.
28. Вопрос 28. Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов.
29. Вопрос 29. Признак сходимости Больцано-Коши, признак Дирихле, признак Абеля для знакопеременных рядов.
30. Вопрос 30. Предел функции многих переменных. Повторные пределы, теорема об их равенстве.
31. Вопрос 31. Частные производные функции многих переменных, градиент.
32. Вопрос 32. Ряд Тейлора функции многих переменных.
33. Вопрос 33. Необходимое и достаточное условие экстремума функции многих переменных.
34. Вопрос 34. Криволинейные интегралы первого рода: определение, вычисление.
35. Вопрос 35. Криволинейные интегралы второго рода: определение, вычисление, векторная форма записи, физический смысл.
36. Вопрос 36. Вычисление двойных интегралов по прямоугольной области и по криволинейной трапеции.
37. Вопрос 37. Тройной интеграл - определение, вычисление.
38. Вопрос 38. Поверхностный интеграл первого рода – определение, вычисление.
39. Вопрос 39. Поверхностный интеграл второго рода – определение, вычисление.
40. Вопрос 40. Интеграл от функции комплексного переменного.

Примеры задач:

1. Вычислить предел последовательности:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[3]{3n^3 + n - 8}}{n - 6}, \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - \dots + (2n - 1) - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n}{n + 1} + \frac{n \cdot 2^{-n}}{n + 2},$$

2. Вычислить предел функции

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 5x^2 + 3x + 1}, 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x^2}{2x - 6}, 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x^3} - 3}{x^2 - 3x + 2},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{5 + 3^{x+1}}, 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}, 17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}},$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 5x, 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos x}}{e^{x^2} - 1}, 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{\ln \cos 4x}, 12) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 6 \operatorname{tg} x)^{\frac{\sin 2x}{x^2 + 3x^3}},$$

3. Найти точки разрыва функции и определить тип  $y(x) = \ln \frac{x^2}{x+1}$ ,

4. Вычислить производные заданных функций

$$1) y = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}, \quad 2) y = (\arcsin \sin^2 x)^{\arctg x}, \quad 3) y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x$$

5. Найти интеграл, применяя простейшие преобразования  $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-5 \ln x}}$ ,

6. Найти интеграл, используя интегрирования по частям  $\int x^2 e^{3x} dx$ .

7. Найти интеграл, выделив полный квадрат  $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2 - 5x + 11}$ .

8. Найти интеграл от рациональных дробей  $\int \frac{(2x^2 - x)dx}{(x+4)(x^2 + 5)}$ .

9. Найти интеграл от тригонометрических функций  $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x}$ .

10. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}, 2) \int_{-3}^0 (x-2)e^{-\frac{x}{3}} dx, 3) \int_1^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x+1}}$$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 2x$  и  $y = 3x - 1$ .

12. Найти объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси  $OX$ , ограниченной линиями  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ .

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Текущий контроль проводится в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр. Результаты контрольной точки могут быть зачтены как ответы на вопросы по разделам, вошедшим в данную контрольную точку.

Оценка «отлично» ставится в случае демонстрации высокого уровня знаний определений, формулировок теорем и их доказательств, умения решать практические задачи с использованием оптимальных методов и анализировать полученный результат.

Оценка «хорошо» ставится в случае, если студент демонстрирует в целом успешное, но содержащее отдельные ошибки в определениях, формулировках теорем и их доказательствах, способен предложить оптимальный метод решения для практических задач, возможно допускает незначительные ошибки при вычислениях.

Оценка «удовлетворительно» ставится в случае, если студент демонстрирует частичное, фрагментарное владение определениями, формулировками теорем и их доказательствами, способен предложить метод для решения для практических задач, возможно допускает незначительные вычислительные ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» ставится в случае, если студент демонстрирует низкий уровень знаний определений, формулировок теорем и их доказательств.

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=8938>, <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=8938>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине, в том числе онлайн-система адаптивного обучения математике Цифровой репетитор Plario

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

– Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Ч. 1 / Фихтенгольц Г. М.. - Санкт-Петербург : Лань, 2021. - 444 с.

– Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. [Ч.] 2 / Г. М. Фихтенгольц. - Изд. 8-е, стер.. - СПб. [и др.] : Лань, 2006. - 463 с.:

– Змеев О. А. Математический анализ : [учебное пособие по специальности 351500 - "Математическое обеспечение администрирования информационных систем"]. Ч. 1 / О. А. Змеев, А. Ф. Терпугов, Р. Т. Якупов ; Том. гос. ун-т. - [2-е изд., испр.]. - Томск : Изд-во НТЛ, 2006. – 172 с.

– Змеев О. А. Математический анализ : [учебное пособие по специальности 351500 - "Математическое обеспечение администрирования информационных систем"]. Ч. 2 / О. А. Змеев, А. Ф. Терпугов, Р. Т. Якупов ; Том. гос. ун-т. - Томск : Изд-во НТЛ, 2006. – 169 с.

– Змеев О. А. Математический анализ : [учебное пособие по специальности 351500 - "Математическое обеспечение администрирования информационных систем"]. Ч. 3 / О. А. Змеев, А. Ф. Терпугов, Р. Т. Якупов ; Том. гос. ун-т. - Томск : Изд-во НТЛ, 2007. - 151 с.

б) дополнительная литература:

– Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : тридцать шесть лекций. Ч. 1 / Дмитрий Письменный. - Изд. 4-е. - М. : АЙРИС-пресс, 2004. – 279 с.

– Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : тридцать пять лекций. Ч. 2 / Дмитрий Письменный. - 2-е изд., испр.. - М. : АЙРИС-пресс, 2004. – 251 с.

– Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты / Кузнецов Л. А.. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 240 с.

– Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : Учебное пособие для студентов математических и физических специальностей вузов. - 14-е изд., испр.. - М. : Издательство Московского университета, 1997. - 624 с

в) ресурсы сети Интернет:

– Математический портал, обучающие материалы по работе с математическими пакетами прикладных программ – <http://www.exponenta.ru>

– Справочник математических формул - <http://www.pm298.ru>

– Качественные учебные материалы по высшей математике, физике и другим точным наукам - <https://www.mathprofi.com>

## 13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);



- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).
- инструменты видео-конференций (Adobe Connect, Яндекс.Телемост, Zoom, Voov)
- онлайн-доски Jamboard, Miro, SBoard,
- вспомогательные цифровые инструменты для образовательного процесса (Mentimeter, Yandex Forms, Overleaf, PDF-XChange Viewer, Яндекс.Контекст)

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
- ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
- Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
- ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
- ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

#### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате («Актру»).

#### **15. Информация о разработчиках**

Шкленник Мария Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики ИПМКН ТГУ