

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан



Л. В. Гензе

« 31 » 08 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

Функциональный анализ

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2022, 2023

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.2.02

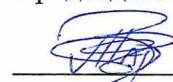
СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП



Л.В. Гензе

Председатель УМК



Е.А. Тарасов

Томск – 2022

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить основные понятия функционального анализа, изучить основные принципы функционального анализа, получить необходимые знания теории операторов в банаховых и гильбертовых пространствах для дальнейшего самостоятельного изучения математической литературы.

– Научиться использовать теоретические знания для решения интегральных и дифференциальных уравнений, задач о наилучшем приближении в конкретных пространствах, о характере сходимости последовательностей, о разложении в ряды Фурье, о нахождении спектра об исследовании свойств операторов и других практических задач профессиональной деятельности.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Пятый семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: математический анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, топология, теория функций комплексного переменного.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 з.е., 216 часов, из которых:

-лекции: 48 ч.

-практические занятия: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1 Нормированные пространства.

1. Определения, свойства, примеры нормированных пространств.
2. Линейные ограниченные операторы, примеры.
3. Конечномерные пространства. Изоморфизмы, изометрии.
4. Линейные функционалы. Теоремы Хана-Банаха: аналитическая и геометрическая формы
5. Принцип равномерной ограниченности.
6. Принцип открытости.
7. Вполне непрерывные операторы. Компактность в нормированных пространствах.
8. Сопряжённые операторы.
9. Естественная изометрия. Признак ограниченности множества. Рефлексивность.

Тема 2. Гильбертовы пространства.

1. Теорема о проекции. Теорема о наилучшем приближении.
2. Общий вид функционала.
3. Ортонормированные системы и базисы. Ряды Фурье.
4. Сопряжённые операторы в гильбертовых пространствах.
5. Вполне непрерывные и конечномерные операторы.

Тема 3. Теорема Стоуна-Вейерштрасса.

1. Доказательство теоремы Стоуна-Вейерштрасса для вещественного и комплексного случая. Примеры всюду плотных алгебр в пространствах $C(K)$.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проверки выполнения домашних заданий, проверки индивидуальных заданий и проведения коллоквиума. Фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в пятом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Экзаменационный билет содержит три вопроса: два теоретических и один практический. Ответ на первые два вопроса предполагает формулировки и доказательства и проверяет ИОПК 1.1 и ИОПК 1.3. Третий вопрос, проверяющий ИОПК 1.2, предполагает решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов.

Ответ на все три вопроса оценивается оценкой «отлично», ответ на два вопроса – оценкой «хорошо», Решение задачи и формулировки теорем без доказательства или ответ на один теоретический вопрос с доказательством, а второй без доказательства – «удовлетворительно». В остальных случаях оценка выставляется в зависимости от ответов на дополнительные вопросы.

Перечень теоретических вопросов

1. Нормированные пространства. Свойства.
2. Неравенства Гёльдера и Минковского.
3. Примеры банаховых и небанаховых нормированных
4. пространств.
5. Сепарабельность. Примеры сепарабельных и несепарабельных нормированных пространств.
6. Линейные операторы. Теорема о равносильности непрерывности и ограниченности. Следствия.
7. Примеры линейных ограниченных и неограниченных операторов.
8. Пространство $L(E, F)$. Теорема о полноте.
9. Плотные и нигде не плотные множества. Примеры. Теорема Бэра. Пример нормированного пространства, равного объединению счётного числа нигде не плотных множеств.
10. Поточечная и равномерная ограниченность операторов. Примеры. Принцип равномерной ограниченности.
11. Теоремы о поточечной сходимости последовательности операторов. Связь с равномерной сходимостью. Примеры.
12. Линейные ограниченные функционалы. Примеры линейных ограниченных и неограниченных функционалов.
13. Теорема Хана-Банаха (аналитическая форма), для комплексного случая, для нормированных пространств. Следствия 1-8.
14. Конечномерные нормированные пространства. Изоморфизм всех нормированных пространств одной размерности. Следствия.
15. Компактность единичного шара в конечномерных пространствах и некомпактность в бесконечномерных пространствах. Теорема о почти перпендикуляре. Примеры в l_p , C_0 , $C[a, b]$, $L_p(a, b)$.
16. Выпуклые функционалы. Свойства функционала Минковского.
17. Теорема о разделении выпуклых множеств.
18. Теорема о строгом разделении выпуклых множеств.
19. Связь между линейными функционалами и гиперплоскостями. Примеры гиперплоскостей и подпространств, не являющихся гиперплоскостями.
20. Выпуклые и идеально выпуклые множества. Свойства, примеры. Теорема о замкнутых выпуклых множествах в банаховом пространстве.
21. Внутренние и радиально внутренние точки. Примеры. Теорема о радиально внутренней точке $x=0$.
22. Доказательство включения $\text{int}\bar{A} \subset \text{int}A$ для идеально выпуклого множества A в банаховом пространстве.
23. Доказательство включения $\text{int}\bar{A} \subset \text{int}A$ для идеально выпуклого множества A в банаховом пространстве.
24. Принцип открытости отображения.
25. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
26. Относительная компактность. Теоремы Хаусдорфа и Арцела-Асколи.
27. Вполне непрерывные операторы. Примеры. Вполне непрерывность суммы, умножения на число, композиции и предельного оператора. Вполне непрерывность оператора Фредгольма.
28. Вполне непрерывность сопряжённого оператора.
29. Естественная изометрия. Рефлексивные пространства. Примеры. Рефлексивность замкнутого подпространства. Признак неограниченности множества в нормированном пространстве

30. Гильбертовы пространства. Примеры. Свойства. Неравенство Коши-Буняковского.
31. Теорема о наилучшем приближении. Теорема о проекции. Следствия.
32. Общий вид линейных ограниченных функционалов в гильбертовом пространстве. Функционалы в \mathbb{C}^n , l_2 , $L_2(a,b)$.
33. Теорема Шмидта об ортогонализации линейно независимой системы. Примеры ортонормированных систем в пространствах \mathbb{C}^n , l_2 , $L_2(a,b)$.
34. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах. Экстремальное свойство многочлена Фурье. Неравенство Бесселя. Сходимость ряда Фурье.
35. Полные и замкнутые ортонормированные системы. Равносильность этих условий.
36. Сопряжённые операторы. Теорема о существовании оператора T^* . Примеры, свойства, вполне непрерывность оператора T^* в гильбертовом пространстве.
37. Самосопряжённые операторы. Примеры. Теорема о норме самосопряжённого оператора.
38. Конечномерные и вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема о приближении вполне непрерывного оператора конечномерными.
39. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

Примеры задач:

1. Исследовать последовательность функций $x_n(t) = \frac{nt}{n^2t^2+1}$ на сходимость в пространствах $C[-1,1]$, $L_1(-1,1)$, $L_2(-1,1)$.
2. Исследовать последовательность функций $x_n(t) = e^{-nt}$ на
3. Исследовать последовательность функций $x_n(t) = e^{-\frac{t}{t+n+1}}$ на сходимость в пространствах $C[-1,1]$, $L_1(-1,1)$, $L_2(-1,1)$.
4. Является ли ограниченным функционал $f(x) = x(0) - \int_{-1}^1 x(t) dt$ на пространстве $C[-1,1]$. Найти его норму.
5. Является ли ограниченным функционал $f(x) = \int_{-1}^1 t g t x(t) dt$ на пространстве $L_1\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти его норму (в случае ограниченности)
6. Является ли ограниченным функционал $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$ в пространствах l_1, l_2 . Найти норму (в случае ограниченности).
7. Является ли ограниченным функционал $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos \frac{1}{n}$ в пространствах l_1, l_2 . Найти норму (в случае ограниченности)
8. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ – линейное подпространство $L = \{(x,y) : y-2x=0\}$. Продолжить функционал $f(x) = x+y$ с подпространства L на \mathbb{R}^2 с сохранением нормы.
9. Найти норму оператора $T: L_2(-1,1) \rightarrow L_1(-1,1)$, $Tx(t) = tx(t)$.
10. Найти норму оператора $T: L_2(-1,1) \rightarrow L_1(-1,1)$, $Tx(t) = \frac{x(t)}{\sqrt[4]{t}}$

11. Найти сопряжённый к оператору $T: \mathcal{L}_2(0,2) \rightarrow \mathcal{L}_2(0,2)$

$$Tx(t) = \int_1^2 tx(t)dt$$

12. Найти сопряжённый к оператору $T: \mathcal{L}_2(0,2) \rightarrow \mathcal{L}_2(0,2)$ $Tx(t) = \int_0^t sx(s)ds$

13. В пространстве $\mathcal{L}_2(0,2)$ найти элемент $y(t)$, ортогональный подпространству $L = \text{sp}\{1, |t-1|, [t]\}$

14. В пространстве $\mathcal{L}_2(-1,1)$ найти элемент $y(t)$, ортогональный подпространству $L = \text{sp}\{1, t, t^2\}$

15. Исследовать относительную компактность множества

$$A = \{y(t) = \int_0^t x(s)ds : \|x\| \leq K\} \text{ в пространстве } C[0,1].$$

16. Исследовать относительную компактность множества

$A \subset C[0,1]$, где A – множество непрерывно дифференцируемых функций, таких, что $|x'(t)| \leq K$ для всех $t \in [0,1]$ и уравнение $x(t) = 0$ имеет хотя бы один корень на промежутке $[0,1]$.

17. Является ли относительно компактным равномерно ограниченное множество многочленов второй степени в пространстве $C[0,1]$.

18. Является ли относительно компактным множество $\{x \in \ell_2 : |x_n| \leq \frac{1}{2}\}$ в пространстве ℓ_2 .

19. Является ли относительно компактным множество $\{x \in \ell_2 : |x_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\}$ в пространстве ℓ_2 .

20. Является ли вполне непрерывным оператор $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$

$$Tx(t) = x(0) + t^2 x(1)$$

21. Является ли вполне непрерывным оператор $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$

$$Tx(t) = (t^2 - t)x(t)$$

22. Является ли вполне непрерывным оператор

$$Tx(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \text{ в пространстве } C[-1,1].$$

23. Является ли вполне непрерывным оператор $Tx(t) = x(t^2)$ в пространстве $C[-1,1]$

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=8872>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План практических занятий по дисциплине.

г) Методические указания по выполнению индивидуальных заданий.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Колмогоров А.В., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: физматлит, 2009, 572 с.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Функциональный анализ. Санкт-Петербург, «Лань», 2009, 272 с.
3. Филимонова Н.В. Конспект лекций по функциональному анализу. Санкт-Петербург, «Лань», 2015, 176 с.
4. Сергеев А.Г. Лекции по функциональному анализу. М.: МИАН. 2013. 100 с
5. Порошкин А.Г. Лекции по функциональному анализу. Москва: Вузовская книга, 2007. 431 с.
6. Сибиряков Г.В. Введение в теорию пространств Банаха. - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. - 82 с.

б) дополнительная литература

1. Власова Е.А., Марчевский К.А. Элементы функционального анализа. Санкт-Петербург, «Лань», 2015, 400 с.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ и его применение. – М.: Наука, 1980.
3. В. Хатсон, Дж. Пим. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983.
4. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977.
5. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 448 с.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962. - 896 с.

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

–

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Хмылёва Татьяна Евгеньевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функций, ТГУ, доцент.