Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

Теория групп

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки:
Фундаментальная математика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
П.А. Крылов

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– тесты;

– контрольная работа;

– рефераты.

1) Примеры тестовых вопросов (ИОПК 1.1).

Пусть группа имеет счетное множество порождающих элементов. Что можно сказать о мощности самой группы?

Выберите правильный ответ:

1. Группа имеет не более, чем счетную мощность.
2. Мощность самой группы может быть произвольной.
3. Группа имеет счетную мощность.
4. Группа имеет не более, чем континуальную мощность.
5. Если порядки порождающих элементов конечны, то группа конечна.

Выберите правильный ответ:

Обычно для обозначения групповой операции в коммутативной группе используется аддитивная запись, как называется такая группа?

1. Абелевой в честь норвежского математика Н. Абеля.
2. Перестановочной.
3. Симметрической.
4. Хорошей.
5. Суммируемой.

2) Примеры контрольных задач (ИПК 1.1).

Докажите, что:

а) если H – конечное подмножество группы G и произведение двух любых элементов из H снова лежит в H, то H будет подгруппой группы G;

б) если все элементы подмножества H группы G имеют конечные порядки, и произведение двух любых элементов из H снова лежит в H, то H будет подгруппой группы G.

Докажите, что если $a^2 = e$ для любого элемента а группы G, то эта группа коммутативна.

Докажите, что группа простого порядка является циклической и любой ее неединичный элемент будет образующим группы.

За решение задач начисляются баллы от 0 до 100.

Оценка «отлично» выставляется за при 81-100 баллов, «хорошо» выставляется при получении 61-80 баллов, «удовлетворительно» выставляется за 45-60 баллов, «неудовлетворительно» выставляется при получении менее 44 баллов.

3) Темы реферативных работ (ИОПК 1.1): «Математический гений К.Ф. Гаусса», «Вклад российских математиков в развитие теории групп», «Ф.Э. Молин, ученый и педагог», «Теория групп в трудах российских математиков» и др. Рефераты выполняются по желанию студентов, за их выполнение начисляются дополнительные баллы.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет с оценкой в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос и две задачи, часто требующие владения навыков доказательства. Продолжительность зачета 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов (ИПК 1.1)

1. Вопрос 1. Докажите 2-ю теорему Силова.
2. Вопрос 2. В группе $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ найдите централизаторы матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Докажите, что в бесконечной группе имеется бесконечное число подгрупп.

Примеры задач (ИПК 1.1):

1. Задача 1.

Дано: пусть $G = \{2^m \cdot 3^n \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$ и $\cdot$ - обычное умножение.

Требуется: доказать, что $(G,\cdot)$ – группа и $(G,\cdot) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Таблица 1. Система критериев при оценивании ответов на вопросы промежуточной аттестации

Полный, логически обоснованный ответ, изложенный кратко и ясно. Качественное выполнение тестов и домашних заданий, отсутствие пропусков и активное участие на занятиях может послужить дополнительным стимулом для оценки.	5
Полный ответ, но имеются некритичные логические несоответствия, при этом форма изложения достаточно ясная и понятная. Выполнение тестов и домашних заданий и участие на занятиях может послужить дополнительным стимулом для оценки.	4
Ответ не является полным (примерно 50%- 60%), но изложенная часть логически не противоречива и изложена ясно и понятно.	3
Ответ является неполным, менее 40%, изложение логически противоречиво. А также, если ответ логически противоречивый и недоказательный или отсутствует по сути.	2

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Примеры тестовых вопросов (ИОПК 1.1).

Выберите правильные ответы:

1) пересечение и объединение любого семейства подгрупп данной группы G являются подгруппами группы G;

2) пересечение любого семейства подгрупп данной группы G является подгруппой группы G;

3) объединение двух подгрупп A и B группы G является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$;

4) объединение любого семейства подгрупп данной группы G является подгруппой группы G.

Ключи: 2) и 3).

Примеры задач (ИПК 1.1).

1) Докажите, что если A и B – подгруппы группы G и B не содержится в A, то $\langle B \setminus A \rangle = B$.

2) Пусть Ω – произвольное множество, а $S(\Omega)$ – множество всех биективных преобразований $f:\Omega \to \Omega$. Покажите, что $S(\Omega)$ – группа относительно операции композиции преобразований.

3) Представьте группу аддитивную группу рациональных чисел в виде возрастающей цепочки циклических подгрупп.

Примеры теоретических вопросов (ИПК 1.1).

1) Существуют ли бесконечные группы, все элементы которых имеют конечный порядок?

2) Докажите, что всякая бесконечная группа имеет бесконечное число подгрупп.

3) Группа называется локально циклической, если каждое ее конечное подмножество порождает циклическую подгруппу. Докажите, что аддитивная группа рациональных чисел – локально циклическая группа.

Информация о разработчиках

Чехлов Андрей Ростиславович, д.ф.-м.н., профессор каф. алгебры ТГУ.