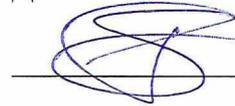


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан



Л. В. Гензе

« 30 » 06 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

Стохастическое моделирование

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :

Фундаментальная математика

Форма обучения

Очная

Квалификация

Магистр

Год приема

2022

Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.3.ДВ.01.03

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП



П. А. Крылов

Председатель УМК



Е. А. Тарасов

Томск – 2022

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить аналитический аппарат условного вероятностного анализа стохастических систем: корректно строить фильтрованные вероятностные пространства и определять стохастические модели; корректно вычислять условные распределения и условные математические ожидания; корректно пользоваться техникой условных плотностей.

- Освоить современный аппарат и приобрести практические навыки стохастического моделирования динамических систем со скачкообразными траекториями методами пуассоновских процессов и теории восстановления.

– Научиться применять понятийный аппарат и современные методы стохастического интегрирования для анализа сложных динамических систем функционирующих в условиях воздействия непредсказуемых случайных факторов.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Первый семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 з.е., 216 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

-практические занятия: 32 ч.

- промежуточная аттестация: 4 ч.

-групповые консультации: 1,9 ч.

- самостоятельная работа обучающегося: 130,4 ч.

- экзамен: 15,7 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Математические основы вероятностных методов.

Вероятностные пространства и основные примеры. Случайные величины и их характеристики. Условные распределения и условные математические ожидания и их основные свойства. Условные плотности.

Тема 2. Методы теории восстановления для анализа динамических Пуассоновских систем.

Пуассоновский считающий процесс в теории восстановления. Основные свойства Пуассоновских процессов. Характеризация процессов Пуассона. Анализ условных распределений Пуассоновских процессов. Применения в актуарном анализе.

Тема 3. Стохастическое исчисление.

Мартингалы и полумартингалы в непрерывном времени и их основные свойства. Разложение Дуба — Мейера. Квадратично интегрируемые мартингалы. Квадратические характеристики и взаимные характеристики мартингалов. Винеровские процессы. Стохастические интегралы для квадратично интегрируемых мартингалов и их основные свойства.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения двух контрольных работ, тестов по лекционному материалу и фиксируется в форме контрольной точки один раз в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Экзамен в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 2 часа. Первая часть состоит из двух вопросов проверяющих ИОПК 1.1. Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИПК 1.1. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Дать определение условной плотности одной случайной величины относительно другой. Объяснить как условные математические ожидания считаются с помощью условных плотностей.
2. Дать определение Пуассоновского процесса через процесс восстановления.
3. Основные свойства распределений скачков Пуассоновского процесса.
4. Характеризация Пуассоновского процесса..
5. Мартингалы и полумартингалы в непрерывном времени и их свойства.
6. Разложение Дуба — Мейера.
7. Квадратично интегрируемы мартингалы. Квадратическая и взаимная квадратическая характеристики.
8. Пуассоновские мартингалы.
9. Процессы Леви.

10. Стохастический интеграл по квадратично интегрируемому мартингалу со скачками и его основные свойства.

Примеры задач:

1. Пусть две случайные величины ξ и η такие что, $\mathbf{E}(\xi | \eta) = 2\eta^3$ и $\mathbf{E} \eta^4 = 2$. Найти $\mathbf{E}(\eta\xi)$.

2. Пусть ξ и η две независимые одинаково равномерно распределённые на интервале $(0, 2\pi)$ случайные величины. Вычислить $\mathbf{E}(\sin(\eta\xi) | \eta)$ и $\mathbf{E}(\eta \sin(\eta\xi))$.

3. Пусть ξ и η две случайные величины с заданной совместной плотностью распределения

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1+y^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + 4y^2 - 4xy}{2(1+y^2)} - |y|\right)$$

(a) Найти плотность $f_{\eta}(y)$.

(b) Найти условную плотность $f_{\xi|\eta}(x|y)$.

(c) Подсчитать $\mathbf{E}(\xi|\eta)$ и $\mathbf{E}(\xi^2|\eta)$.

4. Для $a \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ вычислить условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}(e^{aN_{3t}} | N_{2t} = 2)$$

5. Для всех $t > 0$ вычислить условную вероятность

$$\mathbf{P}(T_2 \leq 2t \leq T_3 | N_{3t} = 4)$$

6. Пусть τ случайная величина, не зависящая от процесса $(N_t)_{t \geq 0}$ равномерно распределена на интервале $[0, 2]$. Для всех $t > 0$ вычислить вероятность

$$\mathbf{P}(N_t = N_{\tau t} + 2)$$

7. Найти разложение Дуба – Мейера для квадрата Винеровского процесса.

8. Найти совместную квадратическую характеристику для Пуассоновского мартингала и Винеровского процесса.

Результаты экзамена определяются по двадцатибалльной шкале. Перевод в пятибалльную по следующему правилу :

0 - 9,99 баллов - «неудовлетворительно»

10 – 12,99 баллов - «удовлетворительно»

13 – 16,99 баллов - «хорошо»

17 – 20 баллов - «отлично»

Критерии оценивания контрольных работ

Неудовлетворительно (0-9,99 баллов)	Удовлетворительно (10 — 12,99 баллов)	Хорошо (13 — 16,99 баллов)	Отлично (17 — 20 баллов)
Работа не сдана или решено верно менее 25% заданий	Решено верно от 25% до 50% заданий	Решено верно от 21% до 80% заданий	Решено верно более 80% заданий

Контрольная работа и экзамен максимально может быть оценен 20 баллами. Итоговая оценка – среднее арифметическое из оценок за контрольные работы и экзамен. При ответе на теоретический вопрос оценивается полнота и точность ответа, логичность и аргументированность изложения материала, умения использовать в ответе фактический материал, знания основной и дополнительной литературы.

Критерии оценивания теоретических вопросов экзамена

Неудовлетворительно (0-9,99 баллов)	Удовлетворительно (10 — 12,99 баллов)	Хорошо (13 — 16,99 баллов)	Отлично (17 — 20 баллов)
Дан неправильный ответ, однозначно неправильная трактовка темы.	В целом дан правильный ответ на вопрос, но он изложен поверхностно и с нарушением логики изложения. Знание минимума литературы.	Дан правильный ответ на вопрос, но не все изложено развернуто и логически структурировано. Знание основной литературы.	Дан правильный и развернутый ответ на вопрос. Студент четко и логично изложил свой ответ на поставленный в билете вопрос. Знание основной и дополнительной литературы.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=12874>

б) Емельянова Т.В., Исаева Н.А., Кривякова Э.Н. Случайные величины. Методические указания. Часть 3. Томск, ТГУ, 2005.

в) Исаева Н.А., Кривякова Э.Н. Случайные величины. Последовательности случайных величин. Методические указания. Часть 2. Томск, ТГУ, 1989.

г) Коршунов Д.А., Фосс С.Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей, СПб, Лань, 2004.

д) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

е) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: ЛИБРОКОМ, 2014, 652 с.
2. Ватугин В.А., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков В.П. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах, М.: Ленанд, 2015, 369 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей, М.: Кнорус, 2014, 492 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2001, 318 с.
5. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. Санкт-Петербург: Лань, 2016, 317 с.
6. Жакод, Ж. И Ширяев, А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Том 1, М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 1994, 544 с.
7. Липцер, Р.Ш. и Ширяев, А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974,
8. Липцер, Р.Ш. и Ширяев, А.Н. Теория Мартингалов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1986, 512 с.
9. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: КДУ, 2009, 326 с.
10. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2004, 271 с.
11. Ширяев А.Н. Вероятность - 1. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. М.: Изд-во МЦНМО, 2011, 551 с.
12. Ширяев А.Н. Вероятность - 2. Суммы и последовательности случайных величин - стационарные, мартингалы, марковские цепи. М.: Изд-во МЦНМО, 2011, 553-967 с.

б) дополнительная литература:

1. Бернштейн С.Н. Теория вероятностей. М-Л., 1946.

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения, М.: Кнорус, 2013, 478 с.
4. Козлов М.В. Элементы теории вероятностей в задачах и примерах. М., изд-во МГУ, 1991.
5. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М., 1998.
6. Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М., 1983.
7. Прохоров Ю.В., Пономаренко Л.С. Лекции по теории вероятностей и математической статистике, Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, 2012, 252 с.
8. Прохоров А.В., Ушаков А.Ф., Ушаков В.А. Задачи по теории вероятностей. М., Наука, 1989.

в) ресурсы сети Интернет:

- https://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=tvp&option_lang=rus

- <http://journals.tsu.ru/mathematics/>

- <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02365156>

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
- ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
- Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
- ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
- ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Пергаменщиков Сергей Маркович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа и теории функций, профессор

Пчелинцев Евгений Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа и теории функций, доцент