Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан ММФ ТГУ
Л. В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Качественный анализ дифференциальных уравнений

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :
Фундаментальная математика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
П.А. Крылов

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, опроса по лекционному материалу, выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

Самостоятельная работа №1
Вариант 1.

1. Найти особые точки и определить их характер для функции $w = \ln(z^i)$;
2. Найти область неопределенности ветви функции $[\arctan z]^i$ в точке $z = 0$.
3. Проинтегрировать и определить характер особых точек интегралов уравнения $w''w^2 = -2w'^3 + ww'^2$.
4. Исключая, C и C_1, составить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $w = \ln\left(z + C\right)$, $w = e^{\frac{1}{zC_1}}$, и выяснить различие в характере получаемых при этом уравнений.

Самостоятельная работа №1
Вариант 2.

5. Найти особые точки и определить их характер для функции $w = z^i$;
6. Найти область неопределенности ветви функции $[\ln(\ln z)]^i$ в точке $z = 0$.
7. Проинтегрировать и определить характер особых точек интегралов уравнения $w'' = \dfrac{w'^2(1+i)}{w}$.
8. Исключая, C и C_1, составить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $w = e^{\frac{1}{z+C}}$, $w = e^{\frac{1}{Cz+C_1}}$, и выяснить различие в характере получаемых при этом уравнений.

Самостоятельная работа №1
Вариант 3.

1. Найти особые точки и определить их характер для функции $w = [\ln(\ln z)]^i$;

2. Найти область неопределенности ветви функции $[\ln z]^{i+1}$ в точке $z = 0$.

3. Проинтегрировать и определить характер особых точек интегралов уравнения $$w'' = w'^2 \left[\frac{w[2k^2w^2 - (1+k)^2]}{(1-w^2)(1-k^2w^2)} + \frac{1}{\lambda\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \right].$$

4. Исключая, C и C_1, составить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $w = e^{zC}$, $w = e^{-\frac{1}{1-zC_1}}$, и выяснить различие в характере получаемых при этом уравнений.

Контрольная работа
Вариант 1.

1. Показать, что линии, выражаемые уравнением
$$x^2y^2 = (y+a)^2 + (b^2 - y^2) \text{ (конхоида),}$$
уникурсальные и выразить их координаты через рациональные функции параметра.

2. Построить поверхности Римана для функций, определяемых уравнениями:
$$w^3 - 3w^2 + z^6 = 0,$$

3. Проверить, выполняются ли условия Фукса об отсутствии подвижных критических точек, определить жанр и проинтегрировать уравнение
$$w'^3 + 3w'^2 - 27w^2 - 4 = 0.$$

Контрольная работа
Вариант 2.

4. Показать, что линии, выражаемые уравнением
$$3x^2 - xy + 2y^2 + x^3 - 8y^3 = 0$$
уникурсальные и выразить их координаты через рациональные функции параметра.

5. Построить поверхности Римана для функций, определяемых уравнениями:
$$w^3 = (z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)^2.$$

6. Проверить, выполняются ли условия Фукса об отсутствии подвижных критических точек, определить жанр и проинтегрировать уравнение
$$w'^3 + w'^2 + 3w' + 2ww' + 3w + w^2 + w^3 = 0.$$

Контрольная работа
Вариант 3.

1) Показать, что линии, выражаемые уравнением $x^2 = a^2 + 4a^2y^3 - 3a^2y$.

уникурсальные и выразить их координаты через рациональные функции параметра.

2) Построить поверхности Римана для функций, определяемых уравнениями:

$$w^3 - 3w^2 + z^6 = 0.$$

3) Проверить, выполняются ли условия Фукса об отсутствии подвижных критических точек, определить жанр и проинтегрировать уравнение

$$w'^3 + 3w'^2 + w^6 - 4 = 0.$$

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет с оценкой в первом семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса и задачу. Продолжительность зачета 1,5 часа.

Список теоретических вопросов

1. Существование интегралов дифференциальных уравнений. Определение коэффициентов.
2. Существование и единственность интегралов уравнений высших порядков.
3. Уравнение Лежандра.
4. Разложение интегралов в области особых точек.
5. Аналитическое продолжение интеграла. Классификация особых точек.
6. Уравнения гиперэллиптического типа.
7. Неподвижные и подвижные особые точки.
8. Условия Фукса.
9. Уравнения с неподвижными критическими точками.
10. Метод малого параметра.
11. Теорема Пуанкаре.
12. Уравнение Гаусса. Гипергеометрический ряд.
13. Теорема Пенлеве.
14. Уравнения класса Фукса.
15. Поверхности Римана.
16. Уравнения высших порядков. Группа уравнения.
17. Теорема Эрмита.
18. Уравнения высших порядков. Группа уравнения.
19. Интеграл Шварца-Кристоффеля.

Примерный список задач.

1. Применить метод Пенлеве к нахождению уравнений с неподвижными критическими точками вида $w'N = R(w)$.

2. Для уравнений с неподвижными критическими точками $w'' = \sum_1^n \frac{\left(1+\frac{1}{N_k}\right)}{w-a_k} w'^2$ показать, применяя метод Пенлеве, что имеет место равенство $(n+1)-2 = \sum_1^n \frac{1}{N_k} + \frac{1}{N_0}$, или, полагая

$n' = n' + 1,\ n' - 2 = \sum \frac{1}{N_k}$.

3. Применяя метод Пенлеве, показать, что уравнения с неподвижными критическими точками вида

$$w'' = \left[\frac{2}{3w} + \frac{1}{2(w-1)}\right] w'^2 + A_1(w,z)w' + A_2(w,z)$$

должны иметь следующие коэффициенты

$$w'' = \left[\frac{2}{3w} + \frac{1}{2(w-1)}\right] w'^2 + \left[a_0 w + a_1 + \frac{B}{w}\right] w' +$$

$$+w(w-1)\left[\frac{3a_0^2}{8} + \frac{3}{2}(a_0' - a_0 a_1) - \frac{3}{4}(a_0' - a_0 a_1) - \frac{3}{4}a_0^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{3B}{w^2} + \frac{h}{(w-1)^2} + 6\frac{(B' - a_1 B) - 3B^2}{2w} + \frac{h}{3(w-1)}\right],$$

при условии $2h = (a_0 + a_1 + B) - h' = 0$.

4. Определить характер подвижных полюсов в интегралах уравнения

$$w'' = \frac{w'^2}{2w} - 2ww' - \frac{w^3}{2} + fw - \frac{1}{2w}$$

и показать, что его интеграция может быть сведена к интеграции линейного уравнения четвертого порядка.

5. Показать, что уравнение

$$w'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{w'^2}{w} - q(z)w' + nr(z)w$$

может быть сведено к линейному уравнению второго порядка.

6. Найти условия, при которых уравнение вида $w = P(w', z)$, где P – многочлен относительно w', есть уравнение с неподвижными критическими точками.

7. Построить поверхности Римана для функций, определяемых уравнением

$$w^6 = (z - a_1)^3 (z - a_2)^4 (z - a_3)^5.$$

8. Показать, что для функций, определяемых рядами

$$w = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{1\cdot 3\cdot 5 \cdots p}}{p^3}$$

(где p – простое число), окружность есть особая линия.

9. Доказать теорему: если интеграл $w = f(z)$ уравнения $w' = \dfrac{P(w,z)}{Q(w,z)}$, где P и Q – многочлены относительно w и z, таков, что обратная функция $z = \varphi(w)$ имеет бесконечное число ветвей, то уравнение $f(z) = A$ имеет бесконечное число решений при любом значении A, кроме конечного числа исключительных значений, которые можно все определить непосредственно по уравнению.

10. Применяя метод Пенлеве, показать что уравнения с неподвижными критическими точками вида

$$w'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1}\right) w'^2 + A_1(w,z)w' + A_2(w,z)$$

должны иметь следующие коэффициенты

$$w'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1}\right)w'^2 + \left(a_1 + \frac{B_1}{w} - \frac{B_2}{w-1}\right)w' + w(w-1)\left[4d^2(2w-1) + \frac{B_1^2}{w^2} - \frac{B_2^2}{(w-1)^2} + \frac{h}{w} + \frac{k}{w-1}\right],$$

при условии $da_1 = d'$.

При ответе на вопросы теста оценивается полнота и точность ответа, логичность и аргументированность изложения материала, умения использовать в ответе фактический материал. Для выставления текущей успеваемости при контроле СРС рекомендуется использовать следующую таблицу.

Оценка результатов контроля СРС	Критерии соответствия
(отлично)	Дан правильный и развернутый ответ на вопрос. Студент четко и логично изложил свой ответ на поставленный в тесте вопрос.
(хорошо)	Дан правильный ответ на вопрос, но не все изложено развернуто и логически структурировано.
(удовлетворительно)	В целом дан правильный ответ на вопрос, но он изложен поверхностно и с нарушением логики изложения.
(неудовлетворительно)	Ответ представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения. Студент очень плохо владеет основными моделями и концепциями. Допущены существенные терминологические и фактические ошибки.
	Дан неправильный ответ, однозначно неправильное понимание вопроса на зачете.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

- Теорема Коши в комплексном случае.
- Полная аналитическая функция.
- Подвижная особая точка д.у.
- Точки ветвления.
- Виды особых точек однозначного характера.
- Теорема Пендеве.

Информация о разработчиках

Доцент ММФ ТГУ, к.ф.-м.н. Колесников Иван Александрович.
Доцент ММФ ТГУ, к.ф.-м.н. Садритдинова Гулнора Долимджановна.