

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:  
Декан физического факультета

 С.Н. Филимонов

«15» апреля 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

**Функциональный анализ**

по направлению подготовки

**03.03.02 Физика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**«Фундаментальная физика»**

Форма обучения  
**Очная**


Квалификация  
**Бакалавр**

Год приема  
**2021**

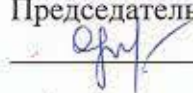
Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.ДВ.01.01.04

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

 О.Н. Чайковская

Председатель УМК

 О.М. Сюсина

Томск – 2021

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-2– Способен проводить научные исследования физических объектов, систем и процессов, обрабатывать и представлять экспериментальные данные.

ПК-1 – Способен проводить научные исследования в выбранной области с использованием современных экспериментальных и теоретических методов, а также информационных технологий

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 2.2 – Анализирует и интерпретирует экспериментальные и теоретические данные, полученные в ходе научного исследования, обобщает полученные результаты, формулирует научно обоснованные выводы по результатам исследования.

ИПК 1.1 – Собирает и анализирует научно-техническую информацию по теме исследования, обобщает научные данные в соответствии с задачами исследования

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить понятийный аппарат и методы функционального анализа.

– Научиться применять понятийный аппарат и методы функционального анализа для решения практических задач профессиональной деятельности.

## **3. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, предлагается обучающимся на выбор. Профессиональный модуль "Теоретическая и математическая физика".

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Семестр 5, экзамен.

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Математический анализ, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Дифференциальные уравнения, Методы математической физики.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины (модуля)**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часа, из которых:

– лекции: 32 ч.;

–практические занятия: 16 ч.;

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам**

Тема 1. *Обобщенные функции.*

Пространство основных функций. Обобщенные функции над пространством  $K$ . Действие над обобщенными функциями. Дифференцирование обобщенных функций. Замена переменной обобщенной функции. Сходимость в пространстве  $K'$ . Формула

суммирования Пуассона. Локальные свойства обобщенной функции. Носитель обобщенной функции. Решения простейших уравнений с обобщенными функциями. Степенные особенности. Регуляризация степенных особенностей. Формула Сохоцкого. Свертка обобщенных функций. Классическая свертка. Обобщенная свертка. Обобщенные решения дифференциальных уравнений. Фундаментальные решения. Обобщенная задача Коши. Обобщенные функции медленного роста и преобразования Фурье.

Тема 2. *Множества.*

Терминология теории множеств. Понятие множества. Операции над множествами. Двойственность. Функция на множестве. Бинарные отношения. Бесконечные множества. Теоремы о счетных множествах. Несчетные множества. Теорема Кантора-Бернштейна. Мощность множества. Упорядоченность на множестве. Частично упорядоченное множество. Порядковый тип. Вполне упорядоченные множества. Трансфинитная индукция. Порядковые числа. Системы множеств. Кольцо. Полукольцо. Множества на числовой прямой.

Тема 3. *Мера.*

Мера и ее свойства. Аддитивные функции на полукольце и кольце. Определение и свойства меры. Мера Стильеса на прямой. Продолжение меры. Продолжение меры по схеме Жордана. Мера Лебега. Сигма-множества и дельта-множества. Продолжение меры по схеме Лебега.

Тема 4. *Интеграл Лебега.*

Измеримые функции. Определение и свойства измеримых функций. Ступенчатые функции. Сходимости по мере. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега от ступенчатой и функции. Свойства интеграла Лебега. Интеграл Лебега как функция множества. Сравнение одномерных интегралов Римана и Лебега. Приложения теории меры и интеграла Лебега.

## 9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится в форме проверки решений домашних задач и контрольных работ. Контрольная точка проводится не менее одного раза в семестр.

## 10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

**Экзамен в 5 семестре** проводится по экзаменационным билетам и состоит из четырех частей. За каждую часть выставляется оценка по пятибалльной шкале. Итоговая оценка есть среднее от оценок по частям.

Первая часть представляет собой контрольную работу с билетом из пяти задач по теме 1, проверяющих сформированность компетенции ОПК-2 в соответствии с индикатором ИОПК 2.2. Ответы даются в развернутой форме. Примерная задача:

1. Решить уравнение в  $K'$   $(x-1) f = 0$ .

Вторая часть представляет собой теоретическую контрольную работу с билетом из двух вопросов по теме 2, проверяющих сформированность компетенции ПК-1 в соответствии с индикатором ИПК 1.1. Ответы даются в развернутой форме. Примерный билет:

1. Доказать теорему Кантора-Бернштейна.
2. Разбить множество целых чисел  $\mathbb{Z}$  на четыре класса эквивалентности (отношение эквивалентности  $\sim$ ). Привести пример множества эквивалентного фактор множеству  $\mathbb{Z}/\sim$ .

Третья часть представляет собой теоретическую контрольную работу с билетом из трех вопросов по теме 3, проверяющих сформированность компетенции ПК-1 в соответствии с индикатором ИПК 1.1. Ответы даются в развернутой форме. Примерный билет:

1. Определение аддитивной и  $\sigma$  аддитивной функции. Свойства.
2. Непрерывность  $\sigma$  аддитивной функции (понятие и доказательства).

3. Продолжение меры по схеме Жордана. Пример множества, для которого эта мера не существует. Схема построения меры Лебега.

Четвертая часть является устным экзаменом с билетом из двух вопросов по теме 4 и дополнительными вопросами по всему курсу, проверяющими сформированность компетенции ПК-1 в соответствии с индикатором ИПК 1.1. Ответы даются в развернутой форме. Примерный билет:

1. Ступенчатая функция. Доказательство теоремы о последовательности ступенчатых функций.
2. Найти меру множества Кантора.

Примерные дополнительные вопросы:

Вопрос 1. Схема Жордана.

Вопрос 2. Формула Сохоцкого.

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Учебные материалы по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=25809>

б) Банк задач для самостоятельного решения.

в) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

*Перечень вопросов по теме 2.*

1. Доказать теорему Кантора-Бернштейна (без леммы).
2. Доказать, что множество всех подмножеств множества  $X$  имеет мощность большую чем  $X$ .
3. Доказать теорему Кантора (о сравнении мощностей  $X^X$  и  $Y^{X^X}$ ).
4. Доказать теорему о порядковом типе множества  $W_\alpha$ .
5. Доказать лемму о наложении множества  $A$  на подмножество  $B$  и следствия.
6. Доказать, что из двух вполне упорядоченных множеств одно подобно другому или одно подобно отрезку другого.
7. Доказать, что, если  $A$  содержит  $A_1$ , которое содержит  $A_2$ , и  $A$  эквивалентно  $A_2$ , то  $A$  эквивалентно  $A_1$ .
8. Теорема о минимальном кольце над классом множеств (доказать).
9. Определение и свойства кольца и полукольца (с примерами).
10. Теорема о минимальном кольце над полукольцом (доказать).
11. Множества на числовой прямой. Теорема о замыкании классов  $\eta$  на примере  $\eta_1$  (доказать).

*Перечень вопросов по теме 3.*

- 1) Определение аддитивной и  $\sigma$  аддитивной функции. Свойства.
- 2) Непрерывность  $\sigma$  аддитивной функции (понятие и доказательства).
- 3) Мера, продолжение меры, продолжение меры с полукольца на минимальное над ним кольцо.
- 4) Теорема об единственности и продолжения меры в рамках минимального над полукольцом кольца (доказать).
- 5) Если мера на полукольце  $\sigma$  аддитивна, то и ее продолжение на минимальное кольцо тоже  $\sigma$  аддитивно (доказать теорему).
- 6) Классы  $\sigma(M)$  и  $\delta(M)$ , их свойства.
- 7) Представления  $\sigma$  и  $\delta$  множеств.
- 8) Продолжение  $\sigma$ -аддитивной меры на классы  $\sigma(M)$  и  $\delta(M)$ .
- 9) Продолжение меры по схеме Жордана. Пример множества, для которого эта мера не существует.

*Перечень вопросов по теме 4.*

1. Ступенчатая функция. Доказательство теоремы о последовательности ступенчатых функций.

2. Определение сходимости "почти всюду" и сходимости по мере (доказательство теоремы, пример).
  3. Интеграл Лебега от ступенчатой функции, лемма, свойства. Интеграл Лебега от измеримой функции (корректность определения).
  4. Интеграл Лебега как функция множества (теоремы).
- г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа студента включает:

- углубленное теоретическое изучение разделов курса при подготовке к лекционным и практическим занятиям;
- подготовку к обсуждению материала, в том числе самостоятельный поиск необходимых источников информации, включая научно-образовательные ресурсы сети Интернет;
- подготовку к аттестации.

Для эффективного освоения дисциплины студентам рекомендуется:

- после лекции просмотреть и обдумать текст конспекта (15 минут);
- накануне следующей лекции вспомнить материал предыдущей (15 минут);
- изучение теоретического материала по пособию лектора, учебникам и конспекту (1 час в неделю);
- подготовка к практическому занятию (2 часа в неделю);
- работа с литературой (1 час в неделю).

## **12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет**

а) основная литература:

1. Элементы теории функций и функционального анализа /А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Москва : Физматлит , 2009. 570 с.

2. В. Г. Багров, В. В. Белов, В. Н. Задорожный, А. Ю. Трифонов. Методы математической физики: Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций: Учебное пособие для студентов инженерно-физических специальностей вузов. Томск: Изд-во НТЛ, 2002. 670 с.

3. Уравнения математической физики : [учебник для вузов] /В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. М. : Физматлит , 2008. 398, [1] с.

4. В.С.Владимиров. Обобщенные функции в математической физике, Наука, 1976.

5. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шиллов. Обобщенные функции и действия над ними, ГИФМЛ, вып.1 (1958), вып.2,3.

6. Л.Шварц, Математические методы для физических наук, Мир, 1965. VIII

б) дополнительная литература:

1. Г.М.Фихтенгольц., Курс дифференциального и интегрального исчисления. "Наука", Москва. 1970.

2. Я.Микусинский, Р.Сикорский. Элементарная теория обобщенных функций, ИЛ, вып.1, 1959, вып.2, 1963.

3. Халмош П. Теория меры. М.: Издательство иностранной литературы, 1953. 282 с.

### 13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook); системы компьютерной вёрстки LaTeX;

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

– Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>

– ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>

– ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

### 14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

### 15. Информация о разработчиках

Каратаева Инна Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теоретической физики физического факультета ТГУ.