Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан ММФ ТГУ
Л. В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Арифметико-алгебраическая линия изучения математики в средней школе

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :
Фундаментальная математика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
П.А. Крылов

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ОПК-3 Способен использовать знания в сфере математики при осуществлении педагогической деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИОПК 3.1 Популярно и доступно излагает современные научные достижения в сфере математики для аудитории различного уровня

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– проверка выполнения домашних заданий (ИОПК 1.1);

– выступления у доски с объяснением домашних заданий (ИОПК 3.1);

Примеры задач для выполнения домашних заданий.

Запишите периодическую дробь 0,(1287) в виде несократимой обыкновенной дроби.

Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ является иррациональным.

Докажите, что $\left(5^{n+1}+4n+3\right)\vdots 8$ при всех целых $n \ge -1$.

Вычислите коэффициент при x^2 многочлена $(2x+1)^8 + x(x-2)^6$.

Решите уравнение $32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x + 1 = 0$.

Вычислите $\left[\sqrt{7}+\sqrt{11}\right]$.

Постройте график функции $y=\left[\sqrt{x}\right]$. Решите уравнение $\left[\sqrt{x}\right] = 2x-4$.

Запишите числа 82_{10} и -82_{10} в пятеричной, пятеричной симметричной и нега-пятеричной системах счисления. Вычислите сумму данных чисел в перечисленных системах счисления.

Найдите остаток от деления числа $555^3 \cdot 666^4 + 789^5$ на 7.

Найдите остаток от деления $3^{500} + 4^{500} + 5^{500}$ на 9.

Найдите все возможные остатки от деления четвертой степени целого числа на 8.

Не выполняя деления, проверьте делимость числа 18944596 на 6, 7, 8 и 11.

Найдите наибольшее пятизначное число, которое делится на 2, 3, 4 и 5.

Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 1234 и 3456.

Докажите, что при любом натуральном n числа $16n+17$ и $24n+25$ являются взаимно простыми. Чему равно наименьшее общее кратное этих чисел?

Разложите на простые множители число 22344. Найдите количество и сумму натуральных делителей этого числа.

Разложите на простые множители число 9504. Найдите количество и сумму натуральных делителей этого числа.

Решите в целых числах уравнение $n^2 + m^2 + 4n - 2m = 35$.

Решите в натуральных числах уравнение $3^m + 7 = 2^n$.

Решите в натуральных числах уравнение $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Решите в натуральных числах уравнение $1 + n + n^2 + n^3 = 2^m$.

Известно, что значения некоторого многочлена с целыми коэффициентами в точках 2 или 3 кратны 6. Докажите, что значения этого многочлена в точке 5 также кратно 6.

Существует ли многочлен десятой степени, принимающий в точках 1, 2, …, 10 значения 1, 2, …, 10 соответственно?

Найдите многочлен $P(x)$ такой, что $x\cdot P(x) = (x-26)\cdot P(x)$.

Докажите, что если все коэффициенты многочлена целые – числа, то при всяком целом значении аргумента значение многочлена есть целое число. Верно ли обратное утверждение?

Найдите свободный член, сумму всех коэффициентов и сумму коэффициентов при нечетных степенях многочлена $(x^2-2x+4)^{1000}+(x^5-x^3-2)^{2000}$.

При каких значениях параметров корни многочлена $2x^5-3x^4+ax^3-bx^2+6x+2$ равны двум и трем?

Найдите частное и остаток при делении многочлена x^n-2 на двучлен $x-1$.

При делении $f(x)$ на $g(x)$ остаток равен 3, а при делении $f^2(x)$ на $g^2(x)$ остаток равен 9. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $g^2(x)$.

Докажите, что число -1 является корнем многочлена $x^5+2x^4+2x^3+4x^2+5x+2$ и найдите его кратность.

При каком значении параметра сумма двух корней уравнения $4x^3+8x^2-29x+a=0$ равна двум? Решите полученное уравнение.

Многочлен $f(x)$ при делении на $x-7$ дает остаток 12, а при делении на $x+1$ – остаток 9. Найдите остаток от деления $f(x)$ на x^2-6x-7.

Докажите, что число $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ является целым.

Каждое домашнее задание состоит из 8-10 задач (в зависимости от их сложности).

Критерии оценивания:

Результаты выполнения домашнего задания определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если верно решены все домашние задачи (допускается одна арифметическая ошибка и не более двух недочетов по точности и полноте обоснования всех шагов решения).

Оценка «хорошо» выставляется, если верно решены все задачи, кроме, возможно, одной или двух задач (допускается не более трех арифметических ошибок и не более пяти недочетов по точности и полноте обоснования всех шагов решения).

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если верно решено более половины задач (допускаются арифметические ошибки и недочеты по точности и полноте обоснования всех шагов решения).

Результаты выступления у доски с объяснением домашних заданий определяются оценками «зачтено», «не зачтено».

Оценка «зачтено» выставляется, если представлено полное решение, изложенное грамотным языком и доступным для понимания образом, при этом преподаватель и слушатели могут помогать выступающему наводящими вопросами.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен во втором семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса. Все ответы на теоретические вопросы должны сопровождаться приведением примеров соответствующих задач и рассмотрением методических приемов по обучению решению этих задач. Таким образом, каждый вопрос проверяет ИОПК-1.1 и ИОПК-3.1. Продолжительность экзамена 1 час.

Если студент не выполнил в течение семестра домашнее задание по какой-либо из тем, то он получает на зачете дополнительное задание в виде задачи на данную тему. При этом время экзамена увеличивается на 30 минут для каждой дополнительной задачи.

Перечень теоретических вопросов

1. Основные числовые системы. Привести пример перевода бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь. Привести пример иррационального числа (с доказательством).

2. Принцип математической индукции. Доказать методом математической индукции формулу суммы квадратов первых n натуральных чисел, малую теорему Ферма для показателя три и формулу Бине.

3. Позиционные системы счисления. Привести примеры записи чисел и выполнения арифметических действий в различных системах (включая симметричные и нега-позиционных системах). Доказать с помощью двоичного кодирования формулу количества подмножеств конечного множества.

4. Целая и дробная части. Построить графики функций $y=\left[x^2\right]$, $y=\left[x\right]^2$, $y=\left\{x^2\right\}$, $y=\left\{x\right\}^2$. Привести пример решения уравнения, содержащего целую часть числа.

5. Деление целых чисел с остатком. Свойства остатков (с доказательствами). Привести примеры вычисления остатков для арифметических и алгебраических выражений. Доказать малую теорему Ферма для показателей три и пять.

6. Сравнение целых чисел по заданному модулю. Свойства сравнений (с доказательствами). Привести примеры вычисления остатков с помощью сравнений для арифметических и алгебраических выражений. Доказать малую теорему Ферма для показателя семь.

7. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 (с доказательствами). Привести примеры применения признаков делимости при решении задач. Сформулировать несколько признаков делимости в недесятичной системе счисления.

8. НОД и НОК. Свойства НОД. Алгоритм Евклида и соотношение Безу (с доказательством). Применение НОД при сокращении арифметических и алгебраических дробей.

9. Простые и составные числа. Алгоритм проверки число на простоту (с доказательством). Теоремы Евклида и Вильсона (с доказательством). Решето Эратосфена.

10. Разложение на простые множители. Каноническое разложение и его свойства. Формулы количества и суммы натуральных делителей (с доказательством). Взаимно простые числа, свойства делимости и сравнений по модулю для взаимно простых чисел (с доказательством).

11. Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Вывести рекуррентную и явную формулу биномиальных коэффициентов. Привести примеры применения бинома Ньютона при алгебраических и тригонометрических преобразованиях.

12. Полиномиальная формула. Вывести формулы квадрата полинома и куба тринома. Записать общую полиномиальную формулу. Привести примеры применения полиномиальной формулы при алгебраических преобразованиях.

13. Многочлены от одной переменной. Свойства суммы коэффициентов многочлена (с доказательством). Действия над многочленами. Схема Горнера. Привести примеры выполнения действий над многочленами. Корень многочлена. Свойства рационального корня многочлена с целыми коэффициентами (с доказательством).

14. Теорема Безу и её следствия (с доказательством). Привести примеры решения уравнений высших степеней с целыми коэффициентами. Привести пример решения уравнения четвертой степени с целыми коэффициентами, не имеющего рациональных

корней (метод неопределенных коэффициентов).

15. Кратные корни (с примерами). Определение кратности с помощью производной. Основная теорема алгебры. Теорема Виета (с доказательством). Привести примеры нахождения выражений, зависящих от корней многочлена, с помощью теоремы Виета.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится за исчерпывающий, точный ответ, демонстрирующий хорошее знание и понимание теоретического материала, свободное владение математическим аппаратом и методическими приемами, умение излагать материал последовательно, делать необходимые обобщения и выводы.

Оценка «хорошо» ставится за ответ, обнаруживающий достаточное знание и понимание теоретического материала, владение методическими приемами, умение излагать материал последовательно и грамотно. В ответе может быть недостаточно полно развернута аргументация, возможны отдельные недостатки в формулировке выводов или в методической обоснованности выбора формы подачи материала.

Оценка «удовлетворительно» ставится за ответ, в котором материал раскрыт в основном правильно, но недостаточно полно, с отклонениями от последовательности изложения или методически непродуманно. Математически строгие доказательства подменяются правдоподобными рассуждениями, нет полноценных обобщений и выводов, форма подачи материала не выверена.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если ответ обнаруживает незнание теоретического материала и неумение его анализировать, в ответе отсутствуют необходимые математические примеры; нарушены логика и методическая обоснованность в изложении материала, нет необходимых обобщений и выводов.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест

1. Если из четырехзначного числа вычеркнуть первые две цифры, то результат будет на 5 меньше, чем если из того же числа вычеркнуть последние две цифры. На сколько изменится исходное четырехзначное число, если в нем первые две цифры переставить на место последних двух цифр, а последние две цифры – на место первых двух?

   а) 5; б) 45; в) 50; г) 55; д) 495; е) 500; ж) 505.
2. Число A разделили с остатком на три, шесть и девять. Сумма этих остатков равна 15. Найдите остаток при делении A на 18.

   а) 1; б) 3; в) 5; г) 8; д) 11; е) 14; ж) 17.
3. К числу 101 слева и справа приписали по одной и той же цифре так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 9 без остатка. Какая цифра была приписана?

   а) 9; б) 8; в) 7; г) 6; д) 5; е) 4; ж) 3.
4. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $n^2+2n=19+m^2$.

   а) 0; б) 2; в) 3; г) 4; д) 6; е) 12; ж) 24.
5. Найдите набольшее возможное значение выражения НОД($37n+14$; $5n+1$).

   а) 1; б) 3; в) 9; г) 11; д) 33; е) 99; ж) 121.
6. Решите уравнение $x^4-8x^3+24x^2-32x+7=0$. В ответе укажите произведение действительных корней.

   а) -2; б) -1; в) 1; г) $\sqrt{2}$; д) $\sqrt{3}$; е) 2; ж) 3.

7. Решите уравнение $2x^3+9x^2-2x-24=0$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе укажите наибольший из них
   а) -4; б) -2; в) -1,5; г) -0,5; д) 0,5; е) 1,5; ж) 4.
8. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^3-5x^2+3x+2=0$.
   а) 2; б) 5; в) 16; г) 21; д) 25; е) 28; ж) 31.

Ключи: 1 д), 2 ж), 3 б), 4 г), 5 е), 6 в), 7 е), 8 г).

Информация о разработчиках

Гриншпон Яков Самуилович, кандидат физико-математических наук, доцент, Томский государственный университет, доцент кафедры общей математики