

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Теория множеств

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

и компьютерных наук

Основы научно-исследовательской деятельности в области механики

и математического моделирования

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля: домашняя контрольная работа.

Контрольная работа № 1 (ИОПК 1.1- ИОПК 1.2)

1. Пусть A — конечное множество и n — число элементов в A . Каково число элементов в $\text{Exp}A$ (=множество всех подмножеств множества A)?
2. Докажите, что множество A конечно в том и только том случае, если каждое линейное упорядочение на A является вполне упорядочением.
3. Пусть $X, <$ — вполне упорядоченное множество. При $x_1, x_2 \in X$ положим $x_1 \prec x_2$ если $x_2 < x_1$. Покажите, что \prec — вполне упорядочение в том и только том случае, если множество X конечно.

4. Пусть X — бесконечное множество. Покажите, что существует множество $Y \subset X$, для которого $|X| = |Y| = |X \setminus Y|$.
5. Пусть множество X несчетно, а его подмножество A счетно. Покажите, что $|X \setminus A| = |X|$.

Контрольная работа № 2 (ИОПК 1.1- ИОПК 1.2)

1. Докажите, что множество Q всех рациональных чисел счетно.
2. Покажите, что множество P всех иррациональных чисел равномощно множеству R всех вещественных чисел.
3. Покажите, что счетно множество всех интервалов на R с рациональными концами.
4. Покажите, что счетно множество всех полиномов от конечного числа переменных с рациональными коэффициентами.
5. Назовем восьмеркой множество точек двух касающихся внешним образом окружностей, радиусы которых могут быть различны. Покажите, что любое множество попарно непересекающихся восьмерок, лежащих на фиксированной плоскости, счетно.

Контрольная работа № 3 (ИОПК 1.1- ИОПК 1.2)

1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение, $A \subset X$ и $B \subset Y$. Покажите, что $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
2. Докажите, что если каждое счетное подмножество линейно упорядоченного множества X вполне упорядочено, то и все множество X вполне упорядочено.
3. Проверьте, что для любых двух множеств A и B
$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$
.
4. Сколько существует десятичных чисел, в записи которых отсутствуют четные цифры.
5. Какова мощность объединения счетного числа счетных множеств?

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из двух частей.

Первая часть представляет собой теоретический вопрос, проверяющий ИОПК 1.1 и ИОПК 1.3. Ответы на вопросы первой части даются путем выбора из списка предложенных.

Вторая часть содержит практическое задание, проверяющее ИОПК 1.2. Ответы на вопросы второй части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Вопросы к зачету

1. Формулы теории множеств
2. Отображения
3. Счетные множества
4. Несчетные множества
5. Мощность множества
6. Теорема Кантора-Бернштейна
7. Множества мощности континуума
8. Канторово множества. Фракталы.
9. Отношения на множествах
10. Вполне упорядоченные множества
11. Парадоксы теории множеств
12. Аксиома выбора
13. Основные теоремы об ординалах
14. Теорема Цермела
15. Лемма Цорна
16. Аксиома конструктивности
17. Проблема Суслина
18. Аксиома детерминированности
19. Множества нигде не плотные и тонкие множества.
20. Теорема Бэра.
21. Игра Банаха-Мазура, игра Шоке.
22. Борелевские множества

Задачи к зачету

1. Пусть A — конечное множество и n — число элементов в A . Каково число элементов в $\text{Exp}A$ (=множество всех подмножеств множества A)?
2. Докажите, что множество A конечно в том и только том случае, если каждое линейное упорядочение на A является вполне упорядочением.

3. Пусть $x, <$ — вполне упорядоченное множество. При $x_1, x_2 \in X$ положим $x_1 < x_2$ если $x_2 < x_1$. Покажите, что $<$ — вполне упорядочение в том и только том случае, если множество X конечно.
4. Пусть X — бесконечное множество. Покажите, что существует множество $Y \subset X$, для которого $|X| = |Y| = |X \setminus Y|$.
5. Пусть множество X несчетно, а его подмножество A счетно. Покажите, что $|X \setminus A| = |X|$.
6. Докажите, что множество \mathbb{Q} всех рациональных чисел счетно.
7. Покажите, что множество \mathbb{P} всех иррациональных чисел равномощно множеству \mathbb{R} всех вещественных чисел.
8. Покажите, что счетно множество всех интервалов на \mathbb{R} с рациональными концами.
9. Покажите, что счетно множество всех полиномов от конечного числа переменных с рациональными коэффициентами.
10. Назовем восьмеркой множество точек двух касающихся внешним образом окружностей, радиусы которых могут быть различны. Покажите, что любое множество попарно непересекающихся восьмерок, лежащих на фиксированной плоскости, счетно.
11. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение, $A \subset X$ и $B \subset Y$. Покажите, что $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
12. Докажите, что если каждое счетное подмножество линейно упорядоченного множества X вполне упорядочено, то и все множество X вполне упорядочено.
13. Проверьте, что для любых двух множеств A и B

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$
14. Сколько существует десятичных чисел, в записи которых отсутствуют четные цифры.
15. Какова мощность объединения счетного числа счетных множеств?
16. Доказать, что каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество.
17. Если M есть несчетное множество, а A — конечное или счетное множество, содержащееся в M , то M и $M \setminus A$ эквивалентны между собою.
18. Присоединяя к бесконечному множеству A счетное или конечное множество B , получим множество $A \cup B$, эквивалентное множеству A .

19. Всякое бесконечное множество A содержит собственную часть A' , эквивалентную всему множеству A (причем можно предположить, что $A \setminus A'$ есть бесконечное множество).
20. Множество P всех пар натуральных чисел счетно.

Критерии оценивания:

Результаты зачета определяются оценками «зачтено», «не зачтено».

Оценка «зачтено» выставляется, если даны правильные и возможно не полные ответы на теоретический вопрос и задача решена верно.

Оценка «не зачтено» выставляется, если дан неверный ответ на вопрос и доказательство задачи приведено неверно.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы для проверки остаточных знаний представлены в виде тестов, проверяющих ИОПК-1.1 и ИОПК-1.2.

Тест 1.

1. Вытекает ли из равенства $A \setminus B = C$ равенство $A = B \cup C$?
2. Вытекает ли из равенства $A = B \cup C$ равенство $A \setminus B = C$?
3. Верно ли равенство $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$?
4. Верно ли равенство $A \cup (\setminus C) = (A \cup B) \setminus C$?
5. Верно ли равенство $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$?
6. Равносильны ли следующие включения $(A \setminus B) \subset C$ и $A \subset B \cup C$?

Ключи: 1. Нет; 2. Нет; 3. Да; 4. Нет; 5. Нет; 6. Да.

Тест 2.

1. Верно ли равенство $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$?
2. Верно ли равенство $E \times (F \cap G) = (E \times F) \cap (E \times G)$?
3. Верно ли равенство $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$?
4. Верно ли равенство $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$?
5. Верно ли равенство $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$?

Ключи: 1. Да; 2. Да; 3. Да; 4. Не всегда; 5. Да.

Тест 3.

1. Найти взаимно однозначное отображение отрезка $[0,1]$ на отрезок $[a,b]$.
2. Найти взаимно однозначное отображение интервала $(0,1)$ на всю числовую прямую.
3. Найти взаимно однозначное отображение промежутка $[0,1)$ и лучом $[0; +\infty)$
4. Существует ли непрерывная функция, взаимно однозначно отображающая отрезок $[a,b]$ на всю числовую ось.
5. Существует ли непрерывная функция, взаимно однозначно отображающая отрезок $[a,b]$ на множество, состоящее из двух отрезков $[0,1]$ и $[3,4]$.

Ключи: 1. $y = a + (b - a)x$;

2. $\text{ctg}\pi x$;

3. $\text{tg} \frac{\pi}{2} x$;

4. Нет;

5. Нет.

Тест 4.

1. Какова мощность множества всех рациональных функций с целыми коэффициентами в числителе и в знаменателе?
2. Какова мощность множества точек разрыва монотонной функции заданной на отрезке $[a,b]$.
3. Какова мощность множества всех конечных подмножеств натурального ряда?
4. Какова мощность множества всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел?
5. Какова мощность множества всех последовательностей натуральных чисел?
6. Какова мощность множества всех конечных последовательностей действительных чисел?
7. Какова мощность множества всех отрезков на числовой прямой?
8. Какова мощность множества всех счетных подмножеств вещественной прямой?
9. Какова мощность множества всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц?
10. Какова мощность множества всех последовательностей натуральных чисел, содержащих число 7?

Ключи:

1. Множество счетно.
2. Не более чем счетно.
3. Множество счетно.

4. Мощность континуума.
5. Мощность континуума.
6. Мощность континуума.
7. Мощность континуума.
8. Мощность континуума.
9. Мощность континуума
10. 10. Мощность континуума.

Информация о разработчиках:

Гулько Сергей Порфирьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и теории функций

Хмылева Татьяна Евгеньевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций