МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ
Директор института прикладной
математики и компьютерных наук
_______________ А.В. Замятин
« 02 » июля 2021 г.

Фонд оценочных средств по дисциплине

Основы математического моделирования

по направлению подготовки
02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Направленность (профиль) подготовки:
DevOps-инженерия в администрировании инфраструктуры ИТ-разработки

Томск–2021

ФОС составил(и):
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры системного анализа и математического моделирования

Ю.Б.Буркатовская

Рецензент:
д-р физ.-мат. наук, профессор,
профессор системного анализа и математического моделирования Ю.Г. Дмитриев

Фонд оценочных средств одобрен на заседании учебно-методической комиссии института прикладной математики и компьютерных наук (УМК ИПМКН)

Протокол от 17 июня 2021 г. № 05

Председатель УМК ИПМКН,
д-р техн. наук, профессор С.П. Сущенко

Фонд оценочных средств (ФОС) является элементом системы оценивания сформированности компетенций у обучающихся в целом или на определенном этапе ее формирования.

ФОС разрабатывается в соответствии с рабочей программой (РП) дисциплины и включает в себя набор оценочных материалов для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

1. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины

Компетенция	**Индикатор компетенции**	**Код и наименование результатов обучения** (планируемые результаты обучения, характеризующие этапы формирования компетенций)	**Критерии оценивания результатов обучения**			
			Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИОПК-1.1. Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук.	ОР-1.1.1. Знает основные виды математических моделей реальных явлений. ОР-1.1.2. Умеет осуществлять выбор и построение модели реального явления или процесса. ОР-1.1.3. Владеет математическим аппаратом, необходимым для аналитического исследования математических моделей.	Студент показывает всесторонние знания теоретического материала, умеет выбирать модель для процесса или явления, записывать модель в форме уравнений. Выбирает подходящие аналитические или численные методы для анализа модели и инструменты для численного анализа. Проводит анализ модели и интерпретирует результаты моделирования с помощью цифровых инструментов.	Студент знает теоретический материал, умеет выбирать модель для процесса или явления, записывать модель в форме уравнений. Выбирает аналитические или численные методы анализа модели и инструменты для численного анализа. Проводит анализ модели и интерпретирует результаты моделирования с помощью цифровых инструментов.При этом могут быть	Студент не вполне ориентируется в теоретическом материале, допускает ошибки при выборе модели и средств ее анализа. Не полностью проводит анализ модели, не учитывает условий применимости метода анализа. Не вполне верно интерпретирует результаты моделирования.	Студент не разбирается в типах моделей, не может верно построить и проанализировать модель, не владеет методами аналитического и численного решения уравнений, не умеет интерпретировать результаты.
	ИОПК-1.2 Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности.	ОР-1.2.1. Знает основные методы численного анализа математических моделей и границы применимости данных методов. ОР-1.2.2. Умеет осуществлять выбор метода численного решения задачи математического моделирования.				

		ОР-1.2.3. Владеет цифровыми инструментами, необходимыми для численного анализа математических моделей.		допущены некритичные ошибки при определении параметров модели, в аналитических расчетах, а также при выборе и реализации численных методов решения, недочеты при интерпретации результатов.		

2. Этапы формирования компетенций и виды оценочных средств

№	Этапы формирования компетенций (разделы дисциплины)	Код и наименование результатов обучения	Вид оценочного средства (тесты, задания, кейсы, вопросы и др.)
1.	Основные понятия и принципы математического моделирования	ОР-1.1.1.	Форум, доклад
2.	Обыкновенные дифференциальные уравнения	ОР-1.1.1. ОР-1.1.2. ОР-1.1.3. ОР-1.2.1. ОР-1.2.2. ОР-1.2.3.	Задание, доклад
3.	Уравнения в частных производных	ОР-1.1.1. ОР-1.1.2. ОР-1.1.3. ОР-1.2.1. ОР-1.2.2. ОР-1.2.3.	Задание, доклад
4.	Вариационное исчисление	ОР-1.1.2. ОР-1.1.3. ОР-1.2.1. ОР-1.2.2. ОР-1.2.3.	Задание, доклад
5.	Математические модели с управлением	ОР-1.1.1. ОР-1.1.2. ОР-1.1.3.	Задание, доклад
6.	Стохастические модели	ОР-1.1.1.	Форум, доклад
7.	Задачи, связанные со случайными процессами	ОР-1.1.1. ОР-1.1.2.	Задание, доклад
8.	Основные модели для дискретного времени	ОР-1.1.1. ОР-1.1.2. ОР-1.1.3.	Задание, доклад
9.	Основные модели для непрерывного времени	ОР-1.1.1. ОР-1.1.2. ОР-1.1.3.	Задание, доклад

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки образовательных результатов обучения

3.1. Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине.

1. Рассмотрим модель Базыкина, учитывающую как нижнюю границу численности, так и внутривидовую конкуренцию
$$\frac{dx}{dt} = a\frac{bx^2}{b+\tau x} - bx - px^2.$$
Используя замену переменных $s = \frac{ab}{\tau}t$, $y = \frac{\tau}{b}x$ и константы $D = \frac{c\tau}{ab}$, $P = \frac{p}{a}$, получаем уравнение
$$\frac{dy}{ds} = \left(\frac{y}{y+1} - D - Py\right)y.$$
Проанализируйте стационарные решения этого уравнения. Запрограммируйте процесс изменения численности популяции для различных значений параметров и различных начальных значениях численности, приведите графики.
2. Кинетические уравнения Лотки имеют вид
$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1xy, \frac{dy}{dt} = k_1xy - k_2y, \frac{dB}{dy} = k_2y.$$
Проанализируйте стационарные решения. Запрограммируйте процесс изменения концентраций веществ (x, y) для различных значений параметров в окрестностях стационарных точек.
3. По трубе $(x > 0)$ пропускается со скоростью v горячая вода. Пусть u – температура воды в трубе, v – температура стенок трубы, u_0 – температура окружающей среды. Вывести уравнения для функций u и v, пренебрегая распределением температуры по сечению трубы и стенок и считая, что на границах вода-стенка и стенка-среда существует перепад температур и теплообмен происходит по закону Ньютона.

4. Дать постановку задачи о вынужденных колебаниях закрепленной на конце $x = l$ горизонтальной однородной струны, левый конец которой ($x = 0$) движется так, что касательная в этом конце (при $x \to 0+$) в любой момент времени горизонтальна. В момент $t = 0$ струна имела форму $\varphi(x)$ и нулевые начальные скорости.
5. Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике $D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$, если на границе $u(x, y)$ принимает следующие значения: $u(0, y) = A\, sin\, sin\, \frac{\pi y}{b}$, $u(a, y) = 0$, $u(x, 0) = B\, sin\, sin\, \frac{\pi x}{a}$, $u(x, b) = 0$.
6. Среди всех плоских линий заданной длины l, концы которых лежат в заданных точках $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, найти ту, у которой ордината центра тяжести минимальна.
7. Найти приближенное решение в задаче на экстремум функционала методом Ритца и сравнить с точным решением
$$J[y] = \int_0^1 (y'^3 + y')dx, y(0) = 0, y(1) = 2.$$
8. Найти оптимальное управление в задаче на быстродействие
$$T \to min, x(0) = a, x'(0) = b, x(T) = 0, x'(T) = 0, |u| \leq 1,$$
если изменение состояния системы происходит согласно закону:
$$x'' + 2x' + x = u.$$
9. Рассмотрим модель обслуживания с дискретным временем, в которой не более чем один клиент приходит в очередной период времени, и самое большее один клиент завершает обслуживание. Предположим, что за один период с вероятностью α приходит один клиент, а с вероятностью 1 − α не поступает ни одного клиента. При условии, что хотя бы один клиент есть в системе, за один период один клиент завершает обслуживание с вероятностью β, и ни один клиент не уходит с вероятностью 1 − β. Опишите систему с помощью цепи Маркова. При каких условиях средняя длина очереди конечна? Приведите пример распределения $P\{\xi_n = k\} = a_k$. Существует ли предельное распределение? Как оценить среднее время, которое клиент проведет в очереди? Проведите численное моделирование и сравните с теоретическими результатами.
10. К контролирующему роботу на конвейере через минуту поступают изделия, причём каждое из них независимо от других может оказаться дефектным с вероятностью p, $0 < p < 1$. Поступившие изделия робот одно за другим проверяет, затрачивая на проверку каждого по одной минуте. Если изделие оказывается дефектным, то он прекращает проверку других изделий и исправляет дефектное, на что уходит ещё 5 минут. Пусть ξ_n – число изделий, скопившихся у робота через n минут после начала работы. Будет ли последовательность случайных величин ξ_n, $n \geq 1$, цепью Маркова? Проведите численное моделирование процесса.
11. Модель торгов. Пусть $U1, U2, \ldots$ — независимые случайные величины, каждая из которых равномерно распределена на интервале (0,1]. Эти случайные величины представляют собой последовательные ставки на актив, который вы пытаетесь продать и который вы должны продать к моменту $t = 1$, когда актив

обесценивается. В качестве стратегии вы принимаете секретное число θ, и вы примете первое предложение, которое больше θ. Например, вы принимаете второе предложение, если $U1 \leq \theta$, а $U2 > \theta$. Предположим, что предложения поступают согласно процессу Пуассона с параметром $\lambda = 1$.

a. Какова вероятность того, что вы продадите актив к моменту времени $t = 1$?
b. При каком значении θ ваш ожидаемый доход будет максимальным? Вы не получаете ничего, если вы не продадите актив к моменту времени $t = 1$.
c. Чтобы повысить доходность, вы принимаете новую стратегию, заключающуюся в том, чтобы принять предложение в момент времени t, если оно превышает $\theta(t) = (1 - t)/(3 - t)$. Какие у вас новые шансы на продажу актива и какова ваша новая ожидаемая доходность?
d. Проведите численное моделирование и сравните с теоретическими результатами.

12. Предположим, что чистый приток к водохранилищу описывается стандартным броуновским движением. Если в момент времени 0 в резервуаре имеется $x = 3{,}29$ единиц воды, то какова вероятность того, что резервуар никогда не опустеет за первые $t = 4$ единицы времени?

3.2. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине. Примеры вопросов к зачету.

Вопросы ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ, актуализации в рамках сквозных и цифровых технологий не подлежат.

1. Модели движения.
2. Модель хищник-жертва.
3. Модели эпидемии.
4. Анализ стационарных решений систем дифференциальных уравнений
5. Методы Адамса численного решения дифференциальных уравнений.
6. Волновое уравнение.
7. Уравнение Лапласа.
8. Краевые задачи.
9. Метод Фурье решения уравнений гиперболического типа.
10. Разностные схемы для уравнений в частных производных.
11. Вариация функционала.
12. Задача о геодезической линии.
13. Необходимое условие экстремума функционала.
14. Принцип максимума Понтрягина.
15. Числовые характеристики случайных процессов.
16. Выделение тренда временного ряда.
17. Цепи Маркова. Переходные вероятности.
18. Уравнения Чэпмена-Колмогорова.
19. Задачи фильтрации и прогнозирования частично наблюдаемых процессов.
20. Задачи обнаружения скачка параметров.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов обучения

4.1. Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

В курсе действует балльно-рейтинговая система, задания и максимальные баллы приведены в таблице.

№	Задание	Содержание задания	Баллы
1	Примеры математического моделирования	Написать пост на форуме, показывающий ценность и значимость математического моделирования, в частности, для сквозных технологий. Комментировать посты других студентов.	5
2	Модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями	Выписать дифференциальное уравнение, описывающее физический процесс, и найти его решение. Решить три задачи на выбор.	15
3	Популяционные модели	Выписать систему уравнений, описывающую заданную популяционную модель. Найти стационарные решения и промоделировать поведение полученной системы вблизи этих точек с использованием цифровых инструментов. Решить две задачи на выбор.	20
4	Уравнения в частных производных	Вывести уравнение в частных производных, описывающее заданный физический процесс. Решить три задачи на выбор.	20
5.	Решение уравнений в частных производных	Решить аналитически и с помощью численных методов две задачи на выбор. Использовать цифровые инструменты.	20
6.	Вариационное исчисление	Найти аналитическое или численное решение задачи вариационного исчисления с использованием цифровых инструментов. Решить четыре задачи на выбор.	20
7.	Оптимальное управление	Найти оптимальное управление Решить три задачи на выбор.	15
8.	Стохастические модели	Написать пост на форуме, демонстрирующий стохастические модели реальных процессов и явлений. Комментировать посты других студентов.	5
9.	Модели математической статистики	Собрать любые статистические данные и построить математическую модель (описать распределение, оценить параметры, определить корреляцию, сделать выводы по модели).	10
10.	Случайные процессы с дискретным временем	Построить модель для заданного случайного процесса. Решить три задачи на выбор.	15
11.	Случайные процессы с непрерывным временем	Построить модель для заданного случайного процесса. Решить три задачи на выбор.	15
12.	Доклад	Подготовить доклад по цифровым технологиям математического моделирования, либо по использованию математического моделирования для решения задач, в частности, в рамках сквозных технологий.	20
Итоговый балл			160

4.2. Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Билет содержит два теоретических вопроса. Продолжительность зачета 1,5 часа.

Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Максимальный балл за зачет – 40.

Балл за зачет суммируется с баллом текущей аттестации. Таблица перевода баллов в оценки приведена ниже.

Балл	**Оценка**	**Дополнительные условия**
161 – 200	отлично	Задания 2–7 и 8-11 оценены минимум на 10 баллов
121 – 160	хорошо	Задания 2–7 и 8-11 оценены минимум на 5 баллов
81 – 120	удовлетворительно	
0 – 80	неудовлетворительно	