

МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ

Директор института прикладной
математики и компьютерных наук

А.В. Замятин

2021 г.



Фонд оценочных средств по дисциплине

Математическая статистика

по направлению подготовки

02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Направленность (профиль) подготовки:

DevOps-инженерия в администрировании инфраструктуры ИТ-разработки

ФОС составил:

доктор физ.-мат. наук, доцент,
профессор кафедры системного анализа
и математического моделирования



Ю.Г. Дмитриев

Рецензент:

д-р физ.-мат. наук, профессор,
профессор кафедры системного анализа
и математического моделирования



Г.М. Кошкин

Оценочные средства одобрены на заседании учебно-методической комиссии
института прикладной математики и компьютерных наук (УМК ИПМКН).

Протокол от 17 июня 2021 г. № 05

Председатель УМК ИПМКН,
д-р техн. наук, профессор



С.П. Сущенко

Фонд оценочных средств (ФОС) является элементом системы оценивания сформированности компетенций у обучающихся в целом или на определенном этапе ее формирования.

ОС разрабатывается в соответствии с рабочей программой (РП) дисциплины.

1. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины

Компетенция	Индикатор компетенции	Код и наименование результатов обучения (планируемые результаты обучения, характеризующие этапы формирования компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
			Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИОПК-1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук	ОР-1.1.1. Обучающийся сможет: анализировать и применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	Сформированы систематические знания и способность анализировать и применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	Сформированы, но содержащие отдельные пробелы в знании и анализировать и применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Фрагментарные знания по анализу и применению фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Отсутствие знаний по анализу и применению фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук. Использование их в профессиональной деятельности .

	<p>ИОПК-1.2 Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности</p>	<p>ОП-1.2.1. Обучающийся сможет выполнять стандартные действия, при решении типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей базовых математических и естественнонаучных дисциплин.</p>	<p>Сформированы систематические знания и способность выполнять стандартные действия, при решении типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей базовых математических и естественнонаучных дисциплин.</p>	<p>Сформированы, но содержащие отдельные пробелы выполнять стандартные действия, при решении типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей базовых математических и естественнонаучных дисциплин</p>	<p>Фрагментарные знания по выполнению стандартных действий, при решении типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей базовых математических и естественнонаучных дисциплин</p>	<p>Отсутствуют знания по выполнению стандартных действий, при решении типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей базовых математических и естественнонаучных дисциплин</p>
	<p>ИОПК-1.3 Обладает необходимыми знаниями для исследования информационных систем и их компонент -</p>	<p>ОП-1.3.1. Обучающийся сможет использовать основные понятия, факты, концепции, принципы математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.</p>	<p>Сформированы систематические знания по использованию основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.</p>	<p>Сформированы, но содержащие отдельные пробелы в знаниях по использованию основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач.</p>	<p>Фрагментарные знания по использованию основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.</p>	<p>Отсутствуют знания по использованию основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.</p>

2. Этапы формирования компетенций и виды оценочных средств

№	Этапы формирования компетенций (разделы дисциплины)	Код и наименование результатов обучения	Вид оценочного средства (тесты, задания, кейсы, вопросы и др.)
1.	Тема 1. Элементы выборочной теории	ОР-1.1.1, ОР-1.2.1, ОР-1.3.1	Вопросы и задания
2.	Тема 2. Выборочные характеристики.	ОР-1.1.1, ОР-1.2.1, ОР-1.3.1	Вопросы и задания
3	Тема 3. Точечное оценивание параметров распределения.	ОР-1.1.1, ОР-1.2.1, ОР-1.3.1	Вопросы и задания
4	Тема 4. Методы точечной оценки параметров распределений.	ОР-1.1.1, ОР-1.2.1, ОР-1.3.1	Вопросы и задания
5	Тема 5. Интервальное оценивание.	ОР-1.1.1, ОР-1.2.1, ОР-1.3.1	Вопросы и задания
6	Тема 6. Проверка статистических гипотез.	ОР-1.1.1, ОР-1.2.1, ОР-1.3.1	Вопросы и задания
7	Тема 7. Параметрические гипотезы.	ОР-1.1.1, ОР-1.2.1, ОР-1.3.1	Вопросы и задания

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки образовательных результатов обучения

3.1. Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Статистическое оценивание

Задача 1. По реализации выборки X_1, \dots, X_n построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.

Задача 2. По реализации выборки X_1, \dots, X_n построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.

Задача 3. По реализации выборки X_1, \dots, X_n построить оценки методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.

Задача 4. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки $-1.25, 0.11, 2.37, 3.45$ из нормального закона с дисперсией, равной $0,49$. Принять $\gamma=0.96$.

Задача 5. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки $-1.62, .54, 2.12, 3.72$ из нормального закона с неизвестной дисперсией. Принять $\gamma=0.98$.

Задача 6. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X с дисперсией, равной 4 , при выборке объема $n = 100$ и выборочному среднему равному 10 . Принять $\gamma=0.97$.

Задача 7. Подсчитайте ранговый коэффициент корреляции Спирмена между двумя случайными величинами X и Y по следующим данным:

$$X_1=1,5, X_2=2, X_3=4, X_4=1, X_5=3$$

$$Y_1=3, Y_2=2, Y_3=2,1, Y_4=1, Y_5=4$$

Задача 8. Найти достаточную статистику для: параметра распределения Пуассона, для параметров равномерного в $[a,b]$ распределения, для параметров нормального распределения.

Проверка статистических гипотез

Задача 9. При 65 подбрасываниях монеты герб появился 25 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять уровень значимости $\alpha=0.10$.

Задача 10. При 160 подбрасываниях игральной кости шестерка выпала 25 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha=0.05$.

Задача 11. При 120 подбрасываниях игральной кости пятерка выпала 25 раз, а шестерка 15 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha=0.01$.

Задача 12. Можно ли считать два потока абитуриентов однородными, если итоги экзамена по математике на каждом потоке оказались следующими:

1-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 45, 40, 70 и 35 человек;

2-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 40, 35, 65 и 30 человек.

Уровень значимости $\alpha=0,05$.

Задача 13. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости $\alpha=0,1$.

Задача 14. По реализации выборки -1.56, 0.22, 2.34, 3.75 из нормального закона с дисперсией, равной 0,49, и неизвестным математическим ожиданием a проверить гипотезы $H_0: a= 1.2$ и $H_1: a= 2$. Принять уровень значимости $\alpha=0,01$.

Пример контрольной работы (по вариантам):

Вариант 1

1. В чем отличие теории вероятностей от математической статистики. Задачи математической статистики

2. По реализации выборки X_1, \dots, X_n построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.

3. При 65 подбрасываниях монеты герб появился 25 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять уровень значимости $\alpha=0.10$.

Вариант 2

1. Порядковые статистики;

2. По реализации выборки X_1, \dots, X_n построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.

3. Можно ли считать два потока абитуриентов однородными, если итоги экзамена по математике на каждом потоке оказались следующими:

1-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 45, 40, 70 и 35 человек;

2-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 40, 35, 65 и 30 человек. Уровень значимости $\alpha=0,05$.

Вариант 3

1. Эмпирическая функция распределения (э.ф.р.) для одномерной случайной величины;

2. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X с дисперсией, равной 4, при выборке объема $n=100$ и выборочному среднему, равному 10. Принять $\gamma=0.97$.

3. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54,

негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости $\alpha=0,1$.

Вариант 4

1. Общий принцип построения решающих правил.
2. По реализации выборки X_1, \dots, X_n построить оценку методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.
3. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.62, .54, 2.12, 3.72 из нормального закона с неизвестной дисперсией. Принять $\gamma=0.98$.

Вариант 5

1. Функция информации Фишера; неравенство Рао-Крамера.
2. Найти достаточную статистику для: параметра распределения Пуассона.
3. По реализации выборки -1.56, 0.22, 2.34, 3.75 из нормального закона с дисперсией, равной 0,49, и неизвестным математическим ожиданием a проверить гипотезы $H_0: a= 1.2$ и $H_1: a= 2$. Принять уровень значимости $\alpha=0,01$.

Вариант 6

1. Критерий согласия хи-квадрат для простой гипотезы.
2. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X с дисперсией, равной 4, при выборке объема $n = 100$ и выборочному среднему равному 10. Принять $\gamma=0.97$.
3. Комплектуемые изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости $\alpha=0,1$.

3.2. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Экзаменационный билет № 1

1. Вероятностно-статистическая модель и задачи математической статистики.
2. Подсчитайте ранговый коэффициент корреляции Спирмена между двумя случайными величинами X и Y по следующим данным:
 $X_1=1,5, X_2=2, X_3=4, X_4=1, X_5=3$
 $Y_1=3, Y_2=2, Y_3=2,1, Y_4=1, Y_5=4$
3. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -2,-1, 0, 2, 1 из нормального закона. Принять $\gamma=0.91$.
4. Комплектуемые изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 31, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости $\alpha=0,1$.
5. По реализации выборки $X_1 = 0, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 2, X_5 = -2$ построить эмпирическую функцию распределения, оценку медианы и квантили уровня 0,15.

Экзаменационный билет № 2

1. Понятие выборки, статистики, вариационного ряда.
2. При 160 подбрасываниях игральной кости шестерка выпала 25 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha=0.05$.
3. По выборке $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = -1, X_4 = 2$ из нормального закона с дисперсией $\sigma^2 = 4$ построить доверительный интервал для математического ожидания. Уровень доверия $\gamma = 0.9$.

4. Найти достаточную статистику для параметра закона Пуассона.
5. По реализации выборки $X_1 = 0, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 2, X_5 = -2$ построить эмпирическую функцию распределения, оценку медианы и квантили уровня 0,25.

Экзаменационный билет № 3

1. Гистограмма, полигон частот. Ядерная оценка плотности.
2. По выборке $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = -1, X_4 = 2$ из нормального закона с неизвестной дисперсией построить доверительный интервал для математического ожидания. Уровень доверия $\gamma = 0.99$.
3. Подсчитайте ранговый коэффициент корреляции Спирмена между двумя случайными величинами X и Y по следующим данным:
 $X_1=1,5, X_2=2, X_3=4, X_4=1, X_5=3$
 $Y_1=3,5, Y_2=2, Y_3=2,1, Y_4=1, Y_5=4$
4. Построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.
5. По реализации выборки $X_1 = 0, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 3, X_5 = -2$ построить эмпирическую функцию распределения, оценку медианы и квантили уровня 0,35.

Экзаменационный билет № 4

1. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.
2. Найти достаточную статистику для параметра закона Пуассона.
3. Построить оценки методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения
4. По реализации выборки $-1,2; 0,3; 2,4; 3,1$ из нормального закона с дисперсией, равной 0,49, и неизвестным математическим ожиданием a проверить гипотезы $H_0: a = 1, H_1: a = 2$. Принять уровень значимости $\alpha=0,01$.
5. По реализации выборки $X_1 = 0, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 4, X_5 = -2$ построить эмпирическую функцию распределения, оценку медианы и квантили уровня 0,25.

Экзаменационный билет № 5

1. Оценки по методу подстановки. Выборочные моменты. Основные свойства оценок.
2. Найти достаточную статистику для параметров нормального закона.
3. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки $-1, 0, 2, 1$ из нормального закона с неизвестной дисперсией. Принять $\gamma=0.98$.
4. Подсчитайте ранговый коэффициент корреляции Спирмена между двумя случайными величинами X и Y по следующим данным:
 $X_1=1,5, X_2=2, X_3=4, X_4=1, X_5=3$
 $Y_1=3,1, Y_2=2, Y_3=2,1, Y_4=1, Y_5=4$
5. По реализации выборки $X_1 = 0, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 2,5, X_5 = -2$ построить эмпирическую функцию распределения, оценку медианы и квантили уровня 0,15.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов обучения

4.1. Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Текущий контроль проводится в середине семестра. Задания формулируются по билетам.

1. По реализации выборки $X_1 = 0, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 2, X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,15.
2. Область $(-1,1)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на пять равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 9, 15, 12, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Вычислить выборочные среднее и дисперсию по данным п.1.
4. Найти математическое ожидание и дисперсию выборочного момента k -го порядка.
5. Показать, что выборочное среднее сходится по вероятности к математическому ожиданию случайной величины при увеличении объема выборки.

Билет № 2

1. По реализации выборки $X_1 = 0,2, X_2 = 1,1, X_3 = -1,1, X_4 = 2, X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,25.
2. Область $(-2,2)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на пять равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 10, 16, 7, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Вычислить выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса по данным п.1.
4. Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.
5. Доказать асимптотическую нормальность выборочного момента второго порядка.

Билет № 3

1. По реализации выборки $X_1 = 0,3, X_2 = 1,3, X_3 = -1,3, X_4 = 2, X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,35.
2. Область $(-1,3)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 10, 16, 9, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Привести пример смещенной оценки.
4. Методом подстановки построить: оценки момента 2-го порядка, коэффициентов асимметрии и эксцесса.
5. Доказать асимптотическую нормальность эмпирической функции распределения.

Билет № 4

1. По реализации выборки $X_1 = 0,4, X_2 = 1,3, X_3 = -1,3, X_4 = 2, X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,65.
2. Область $(-1,4)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 6, 8, 16, 9, 5. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.
4. Методом подстановки построить оценки момента 3-го порядка, центрального момента 3-го порядка и вычислить их значения по данным п.1.
5. Доказать сходимость по вероятности эмпирической функции распределения к теоретической.

Билет № 5

1. По реализации выборки $X_1 = 0,5$, $X_2 = 1,4$, $X_3 = -1,4$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,75.
2. Область $(-2,5)$ возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 6, 8, 12, 9, 5. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.
4. Методом подстановки построить оценки коэффициента асимметрии и эксцесса, вычислить их значения по данным п.1.
5. Доказать асимптотическую нормальность эмпирической функции распределения.

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все пять вопросов билета. Оценка «Хорошо» - студент ответил правильно на четыре вопроса билета. Оценка «Удовлетворительно» - студент ответил правильно на три вопроса билета. Оценка «Неудовлетворительно» – ответ студента на менее трех вопросов билета.

4.2. Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Критерии оценивания результатов промежуточной аттестации. Задания берутся из экзаменационных билетов п.3.2.

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все пять вопросов экзаменационного билета.

Оценка «Хорошо» ставится, если студент ответил правильно на четыре вопроса экзаменационного билета.

Оценка «Удовлетворительно» ставится, если студент ответил правильно на три вопроса экзаменационного билета

Оценка «Неудовлетворительно» ставится, если студент ответил на менее трех вопросов экзаменационного билета.