

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Вариационное исчисление и методы оптимизации

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

02.03.01 Математика и компьютерные науки

01.03.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) подготовки

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
и компьютерных наук**

**Основы научно-исследовательской деятельности в области механики
и математического моделирования**

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2022, 2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа.

Пример заданий на контрольной по теме «Простейшая задача вариационного исчисления». (ИОПК 1.1-1.3)

1. Решить простейшую задачу

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 x^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow ext, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \sqrt{2}.$$

2. Решить простейшую задачу

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x) dt \rightarrow ext, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 1, \quad x(1) = \dot{x}(1) = 0.$$

Пример заданий на контрольной по теме «Задача Больца».

1. Решить задачу Больца

$$J(x(\cdot)) = \int_0^2 (2x - \dot{x}^2) dt - x^2(0) + x(2) \rightarrow ext.$$

Пример заданий на контрольной по теме «Основы дифференциального исчисления в нормированных пространствах».

1. Найти производную Фреше функционала $J : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ вида $J(x) = \cos x(0)$.

2. Для функции $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ в точках $(x, y) \neq 0, f(0,0) = 0$ найти производные по Гато и Фреше в точке $(0,0)$.

Пример заданий на контрольной по теме «Задача Лагранжа».

1. Решить задачу с подвижным концом

$$J(\zeta) = \int_0^T \dot{x}^2 dt \rightarrow ext, \quad x(0) = 0, \quad T + x(T) + 1 = 0.$$

2. Решить изопериметрическую задачу

$$J(x(\cdot)) = \int_0^\pi x \sin t dt \rightarrow exrt; \int_0^\pi \dot{x}^2 dt, x(0) = 0, x(\pi) = \pi.$$

Пример заданий на контрольной по теме «Принцип максимума Понтрягина».

1. Используя принцип максимума Понтрягина решить задачу Лагранжа

$$\int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min, \ddot{x} - x = u, x(0) = 1.$$

2. Решить задачу оптимального быстродействия

$$T \rightarrow \min \quad -1 \leq x \leq 3, x(0) = 1, \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0, x(T) = -1.$$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если выполнено от 70% работы.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполнено от 50% до 70% работы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполнено менее 50% работы.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из двух частей.

Первая часть содержит один теоретический вопрос, включающий теорему с доказательством, проверяющий ОПК-1, ИОПК 1.1 и ИОПК 1.3.

Ответы на вопросы первой части даются в развернутой форме.

Вторая часть содержит практическую типовую задачу, проверяющую ИОПК 1.2. Ответы на вопросы второй части предполагают решение задачи и краткую интерпретацию полученных результатов.

Перечень теоретических вопросов.

1. Примеры экстремальных задач.
2. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
3. Лемма Дюбуа-Раймона.
4. Первые интегралы уравнения Эйлера.
5. Задача о брахистохроне и её решение.
6. Задача Больца. Необходимые условия.
7. Линейные нормированные и банаховы пространства.
8. Факторпространство банахова пространства.
9. Определение производной Гато и его однозначность. Примеры.
10. Определение производной Фреше и его однозначность. Примеры.
11. Определение строгой дифференцируемости и его однозначность. Примеры.
12. Теорема о композиции дифференцируемых отображений. Примеры.
13. Теорема о среднем и её следствие.

14. Отображения непрерывно дифференцируемые по Гато, Фреше, строго.
15. Частные производные в смысле Гато, Фреше. Теорема о полном дифференциале
16. Оператор Немыцкого и его дифференцируемость.
17. Оператор дифференцируемой связи и его производная.
18. Интегральный функционал и его производная.
19. Оператор краевых условий и его дифференцируемость.
20. Теорема Люстерника о касательном пространстве.
21. Принцип Лагранжа для задач с ограничением типа равенств.
22. Выпуклые функции и множества. Примеры.
23. Выпуклая экстремальная задача.
24. Теорема Куна-Таккера.
25. Конечномерная задача и её решение.
26. Задача Лагранжа и её решение.
27. Принцип максимума для задач оптимального управления.
28. Задача со свободным концом и её решение.

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если на вопрос с доказательством теоремы дан развернутый ответ и все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если имеются пробелы в ответе на теоретический вопрос и неточности в доказательстве или не грубые ошибки в решении задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если имеются существенные пробелы в ответе на теоретический вопрос, структура доказательства неполная или имеются грубые ошибки в решении задачи.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не решена задача или отсутствует теоретический вопрос, либо ответы на теоретический вопрос имеют существенные пробелы.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест

1. Необходимое условие экстремума для вариационной задачи (ИОПК-1.1.):

- a) уравнение Лагранжа
- б) уравнение Больца
- в) уравнение Бернулли
- г) уравнение Эйлера.

2. Для указанной вариационной задачи

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 (1 + \dot{x}^2) dt$$

найти экстремаль, удовлетворяющую условиям $x(0)=19$, $x(1)=30$ (ИОПК 1.1-1.3):

- a) $x(t)=11t+19$
- б) $x(t)=-11t-19$
- в) $x(t)=11t-19$
- г) $x(t)=19t+11.$

3. Найти производную указанного функционала (ИОПК 1.1-1.3)

$$f : H \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \langle x, x \rangle,$$

где H – гильбертово пространство:

- а) $\langle \hat{x}, x \rangle$
- б) $\langle \hat{x}, x \rangle + 1$
- в) $2\langle \hat{x}, x \rangle$
- г) $2\langle \hat{x}, x \rangle + 1.$

Ключи: 1 г), 2 а), 3 в).

Информация о разработчиках

Пчелинцев Валерий Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ