

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

УТВЕРЖДАЮ

Директор института прикладной  
математики и компьютерных наук

А.В. Замятин

« 11 » ноября 2021 г.




## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ


### рабочая программа дисциплины

Закреплена за кафедрой	<i>прикладной математики</i>
Учебный план	<i>01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Прикладная математика и информатика»</i>
Форма обучения	<i>очная</i>
Общая трудоёмкость	<i>10</i>
Часов по учебному плану	<i>360</i>
в том числе:	
аудиторная контактная работа	<i>143,5</i>
самостоятельная работа	<i>153,1</i>
Виды контроля в семестрах	
<i>экзамен/зачет/зачет с оценкой</i>	<i>Семестр 3 – зачет, экзамен Семестр 4 – зачет, экзамен</i>

Программу составила:

д. ф.-м.н., доцент, профессор кафедры прикладной математики  Л.А. Нежелская

Рецензент: д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры


системного анализа и математического моделирования  С.Э. Воробейчиков

Рабочая программа дисциплины «Дифференциальные уравнения» разработана в соответствии с самостоятельно устанавливаемым образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат – Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» по направлению подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика (Утвержден Ученым советом НИ ТГУ, протокол от 27.10.2021 г. № 08).

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры прикладной математики

Протокол от 10.06.2021 г. № 11

Заведующий кафедрой прикладной математики,  
д.т.н., профессор

 А.М. Горцев

Рабочая программа одобрена на заседании учебно-методической комиссии института прикладной математики и компьютерных наук (УМК ИПМКН)

Протокол от 17.06.2021 г. № 05

Председатель УМК ИПМКН,  
д.т.н., профессор

 С.П. Сущенко

## Цель освоения дисциплины

**Цель** – дать студентам знания по теории дифференциальных уравнений, необходимые для понимания ее приложений к теории вероятностей и математической статистики, теории случайных процессов, теории оптимального управления и другим математическим дисциплинам; обеспечить студентов математическим аппаратом, необходимым для применения математических методов в практической деятельности и в исследованиях; познакомить студентов с понятиями и фактами теории дифференциальных уравнений, а также методами интегрирования дифференциальных уравнений.

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к дисциплинам обязательной части Общепрофессионального цикла Блока 1 «Дисциплины».

Взаимосвязь с дисциплинами ОПОП:

Пререквизиты: Математический анализ I-III, Комплексный анализ, Линейная алгебра и аналитическая геометрия I-II

Постреквизиты: Теория вероятностей и случайные процессы I-II, Теория оптимального управления, Методы оптимизации, Численные методы, Уравнения математической физики I-II.

## 2. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины

Таблица 1.

Компетенция	Индикатор универсальной компетенции	Код и наименование результатов обучения
Способность применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<b>ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3, ИОПК-1.4</b>	ОПК-1 Обучающийся сможет: <ul style="list-style-type: none"><li>- работать с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам;</li><li>- выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, формируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин;</li><li>- использовать основные понятия, факты, концепции, принципы математики, информатики, естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой;</li><li>- понимать и применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности.</li></ul>
Способность применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	<b>ИОПК-3.1, ИОПК-3.2, ИОПК-3.3, ИОПК-3.4</b>	ОПК-3 Обучающийся сможет: <ul style="list-style-type: none"><li>- применять современный математический аппарат для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области;</li><li>- уметь собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических</li></ul>

		<p>выводов;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели;</li> <li>- понимать и уметь применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.</li> </ul>
--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Структура и трудоемкость видов учебной работы по дисциплине

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 зачетных единиц, 360 часов.

Таблица 2.

Вид учебной работы	Трудоемкость в академических часах		
	3семестр	4семестр	всего
<b>Общая трудоемкость</b>	180	180	360
<b>Контактная работа:</b>	69,75	69,75	139,5
Лекции (Л):	32	32	64
Практики (ПЗ)	32	32	64
Групповые консультации	2	2	4
Индивидуальные консультации	3,2	3,2	6,4
Промежуточная аттестация	0,55	0,55	1,1
<b>Самостоятельная работа обучающегося:</b>	110,25	110,25	220,5
- выполнение домашних заданий	34	34	68
- изучение учебного материала	42,55	42,55	85,1
- подготовка к рубежному контролю по теме/разделу	33,7	33,7	67,4
<b>Вид промежуточной аттестации</b>	зачет, экзамен	зачет, экзамен	

### 3.2. Содержание и трудоемкость разделов дисциплины

Таблица 3.

Код занятия	Наименование разделов и тем и их содержание /	Вид учебной работы, занятий, контроля	Семестр	Часы в электронной форме	Всего (час.)	Литература	Код (ы) результата(ов) обучения
	<b>Раздел 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка</b>		<b>3</b>		<b>61,05</b>	№1, №3, №5, №6, № 7, № 8	ИОПК-1.1,ИОПК-1.2,ИОПК-1.3,ИОПК-1.4
1.1.	Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Первый и общий интеграл дифференциального уравнения. Изоклины. Поле направлений. Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной. Уравнения с разделёнными и с разделяющимися переменными. Задача Коши.	Лекции	3		2		
1.2.	Составление дифференциального уравнения семейства кривых. Изоклины. Поле направлений.	Практики	3		2		
1.3.	Изучение учебного материала.	СРС	3		2		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		1,5		
1.4.	Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным. Линейные уравнения первого порядка. Метод вариации постоянной. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Уравнения в полных дифференциалах.	Лекции	3		2		
1.5.	Уравнения с разделёнными, с разделяющимися переменными. Задача Коши.	Практики	3		2		
1.6.	Изучение учебного материала.	СРС	3		2		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		2,5		
1.7.	Необходимое и достаточное условие Эйлера. Интегрирующий множитель.	Лекции	3		2		

	Принцип сжатых отображений.					
1.8.	Геометрические и физические задачи.	Практики	3		2	
1.9.	Изучение учебного материала.	СРС	3		2,5	
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		2	
1.10.	Теорема существования и единственности решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра и начальных условий.	Лекции	3		2	
1.11.	Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным.	Практики	3		2	
1.12.	Изучение учебного материала.	СРС	3		3	
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		2,5	
1.13.	Теорема о дифференцируемости решения. Особые точки – узел, седло, фокус, центр. Особые решения.	Лекции	3		2	
1.14.	Линейные уравнения. Уравнение Бернулли.	Практики	3		2	
1.15.	Изучение учебного материала.	СРС	3		2,55	
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		2	
1.16.	Дифференциальные уравнения, не разрешённые относительно производной. Метод введения параметра. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро.	Лекции	3		2	
1.17.	Уравнение Риккати.	Практики	3		2	
1.18.	Изучение учебного материала.	СРС	3		2,5	
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		2	
1.19.	Теорема существования и единственности решения уравнения $F(x, y, y') = 0$ . Особые решения.	Лекции	3		2	
1.20.	Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.	Практики	3		2	
1.21.	Изучение учебного материала.	СРС	3		2	
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		3	
	Текущий контроль успеваемости.	Практики	3		1	
	<b>Раздел 2. Дифференциальные</b>		<b>3</b>		<b>84,7</b>	№1, № 3, №5, №6, № 7, № 8
						ИОПК-

	уравнения порядка выше первого						1.1,ИОПК-1.2,ИОПК-1.3,ИОПК-1.4
2.1.	Сведение уравнений $n$ – го порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Теорема существования и единственности решения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . Простейшие случаи понижения порядка.	Лекции	3		2		
2.2.	Интегрирование уравнений, не разрешённых относительно производной. Дискриминантная кривая. Особое решение. Чертёж.	Практики	3		2		
2.3.	Изучение учебного материала.	СРС	3		3		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		3,5		
2.4.	Линейные дифференциальные уравнения $n$ – го порядка. Свойства линейного дифференциального оператора. Теоремы 1–7 о решениях линейного однородного уравнения.	Лекции	3		2		
2.5.	Интегрирование уравнений не разрешённых относительно производной методом введения параметра. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро.	Практики	3		2		
2.6.	Изучение учебного материала.	СРС	3		3		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		3		
2.7.	Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля.	Лекции	3		1,5		
2.8.	Интегрирование уравнений вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ , $F(y, y' \dots, y^{(n)}) = 0$ .	Практики	3		2		
2.9.	Изучение учебного материала.	СРС	3		2		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		2		
2.10.	Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Различные случаи корней характеристического уравнения. Уравнения Эйлера.	Лекции	3		2,5		

2.11.	Уравнения, однородные относительно неизвестной функции $y$ и её производных. Уравнения, однородные относительно $x$ и $y$ в обобщённом смысле.	Практики	3		2	
2.12.	Изучение учебного материала.	СРС	3		3,5	
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		2,6	
2.13.	Линейные неоднородные уравнения $n$ – го порядка. Теоремы 1–4 о решениях линейного неоднородного уравнения. Метод вариации постоянных.	Лекции	3		2	
2.14.	Интегрирование линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Различные случаи корней характеристического уравнения.	Практики	3		2	
2.15.	Изучение учебного материала.	СРС	3		3	
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		2	
2.16.	Интегрирование линейных неоднородных уравнений методом неопределённых коэффициентов.	Лекции	3		2	
2.17.	Интегрирование линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянных. Метод неопределённых коэффициентов.	Практики	3		2	
2.18.	Изучение учебного материала.	СРС	3		3,5	
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		2	
2.19.	Периодические решения дифференциальных уравнений. Метод малого параметра.	Лекции	3		2	
2.20.	Интегрирование уравнения Эйлера.	Практики	3		2	
2.21.	Изучение учебного материала.	СРС	3		3,5	
	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		2	
2.22.	Краевые задачи. Решение краевых задач методом функции Грина.	Лекции	3		2	
2.23.	Интегрирование линейных уравнений $n$ – го порядка с комплексными коэффициентами.	Практики	3		1	
2.24.	Изучение учебного материала.	СРС	3		3,5	



	Выполнение домашних заданий.	СРС	3		2,6		
2.25.	Функция Грина и её свойства. Построение функции Грина.	Лекции	3		2		
2.26.	Интегрирование линейных уравнений с постоянными коэффициентами различными методами.	Практики	3		1		
2.27.	Изучение учебного материала.	СРС	3		3		
	Выполнение домашних заданий.	СРС			2		
	Текущий контроль успеваемости.	Практики	3		1		
	Подготовка к рубежному контролю по теме/разделу.	СРС	3		33,7		
	Промежуточная аттестация.	Зачёт	3		0,25		
	Промежуточная аттестация.	Экзамен	3		0,3		
	<b>Раздел 3. Системы дифференциальных уравнений</b>		<b>4</b>		<b>44,55</b>	№1, №3, №5, №7, №8	ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3, ИОПК-1.4
3.1.	Основные понятия. Интегрирование системы путём сведения к одному уравнению более высокого порядка.	Лекции	4		2		
3.2.	Уравнения с переменными коэффициентами. Формула Остроградского-Лиувилля.	Практики	4		2		
3.3.	Изучение учебного материала.	СРС	4		3		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		2,5		
3.4.	Нахождение интегрируемых комбинаций. Свойства оператора L. Теоремы 1–8 о решениях линейной системы дифференциальных уравнений.	Лекции	4		2,5		
3.5.	Краевые задачи. Функция Грина.	Практики	4		2		
3.6.	Изучение учебного материала.	СРС	4		4		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		2,5		
3.7.	Метод вариации постоянных. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	Лекции	4		1,5		
3.8.	Метод Эйлера, метод исключения, матричный метод, метод Даламбера,	Практики	4		8		

	метод неопределённых коэффициентов и метод вариации постоянных для интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений.						
3.9.	Изучение учебного материала.	СРС	4		6,55		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		6		
	Текущий контроль успеваемости.	Практики	4		2		
	<b>Раздел 4. Теория устойчивости</b>		<b>4</b>		<b>37</b>	№1, №5, №7, №9	ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3, ИОПК-1.4
4.1.	Определение устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Простейшие типы точек покоя – узел, седло, фокус, центр.	Лекции	4		4		
4.2.	Исследование на устойчивость по определению Ляпунова. Особые точки.	Практики	4		2		
4.3.	Изучение учебного материала.	СРС	4		3		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		2		
4.4.	Теорема Ляпунова об устойчивости, теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости, Теорема Четаева о неустойчивости. Исследование на устойчивость по первому приближению. Предельные циклы.	Лекции	4		4		
4.5.	Исследование на устойчивость по первому приближению нулевого решения. Применение теоремы Гурвица для исследования на устойчивость нулевого решения.	Практики	4		2		
4.6.	Изучение учебного материала.	СРС	4		4		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		3		
4.7.	Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Теорема Малкина.	Лекции	4		2		
4.8.	Построение функции Ляпунова и применение теоремы Ляпунова и Четаева.	Практики	4		2		

4.9.	Изучение учебного материала.	СРС	4		4		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		3		
	Текущий контроль успеваемости	Лекции	4		2		
	<b>Раздел 5. Уравнения в частных производных первого порядка</b>		<b>4</b>		<b>23.2</b>	№1, №4, №5, №7	ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3, ИОПК-1.4, ИОПК-3.1, ИОПК-3.2, ИОПК-3.3, ИОПК-3.4
5.1.	Основные определения. Теорема Ковалевской.	Лекции	4		2		
5.2.	Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. Свойство равных дробей.	Практики	4		2		
5.3.	Изучение учебного материала.	СРС	4		3,5		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		2,6		
5.4.	Линейные однородные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Теорема об общем решении квазилинейного уравнения от функции $n$ переменных.	Лекции	4		4		
5.5.	Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка с заданными начальными условиями.	Практики	4		2		
5.6.	Изучение учебного материала.	СРС	4		3,5		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		3,6		
	<b>Раздел 6. Вариационное исчисление</b>		<b>4</b>		<b>41</b>	№1, №2, №6, №9	ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3, ИОПК-1.4
6.1.	Метод вариаций в задачах с неподвижными границами. Вариация и её свойства. Определения 1–9.	Лекции	4		2		
6.2.	Понятие функционала. Простейшая задача вариационного исчисления с неподвижными границами.	Практики	4		1		
6.3.	Изучение учебного материала.	СРС	4		4		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		3		

6.4.	Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.	Лекции	4		2		
6.5.	Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.	Практики	4		1		
6.6.	Изучение учебного материала.	СРС	4		3		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		3		
6.7.	Функционалы, зависящие от нескольких функций. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.	Лекции	4		2		
6.8.	Система уравнений Эйлера. Уравнение Эйлера-Пуассона.	Практики	4		2		
6.9.	Изучение учебного материала.	СРС	4		2		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		3		
6.10.	Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности.	Лекции	4		2		
6.11.	Нахождение расстояния между кривыми методами вариационного исчисления.	Практики	4		2		
6.12.	Изучение учебного материала.	СРС	4		4		
	Выполнение домашних заданий.	СРС	4		3		
	Текущий контроль успеваемости.	Практики	4		2		
	Подготовка к рубежному контролю по теме/разделу.	СРС	4		33,7		
	Промежуточная аттестация.	Зачет	4		0,25		
	Промежуточная аттестация.	Экзамен	4		0,3		

#### 4. Образовательные технологии, учебно-методическое и информационное обеспечение для освоения дисциплины

Занятия по дисциплине проводятся в классической форме в виде лекций и практических занятий:

- лекции – в виде классического изложения преподавателем основного теоретического материала. В начале лекции проводится быстрый устный опрос по пройденному материалу, который необходим для проведения текущей лекции. В конце лекции подводится краткий итог (перечисление) основных положений, пройденных на лекции;
- на практических занятиях студенты решают задачи под руководством преподавателя. Перед началом занятия проводится быстрый устный опрос по теоретическому материалу, который необходим для проведения практического занятия. В конце занятия преподаватель выдает студентам задачи для самостоятельного решения (домашнее задание).

Обязательными при изучении дисциплины «Дифференциальные уравнения I–II» являются следующие виды самостоятельной работы:

- разбор теоретического материала по пособиям и конспектам лекций;
- решение домашних заданий по темам практических занятий.

Для текущего контроля самостоятельной работы студентов в каждом семестре предусмотрено проведение контрольных работ и коллоквиумов по основным разделам дисциплины.

##### 4.1. Рекомендуемая литература и учебно-методическое обеспечение

№ п/п	Авторы / составители	Заглавие	Издательство	Год издания
1.	Эльсгольц Л.Э.	Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Учебник для физических и физико-математических факультетов	М.: Эдиториал УРСС	2000
2.	Эльсгольц Л.Э.	Вариационное исчисление	М.:ЛКИ	2008
3.	Петровский И.Г.	Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений	М.: Физматлит	2009
4.	Петровский И.Г.	Лекции об уравнениях с частными производными	М.: Физматлит	2009
5.	Степанов В.В.	Курс дифференциальных уравнений. Учебник	М.: ЛКИ	2016
6.	Романко В.К.	Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления	М.: БИНОМ. Лаборатория знаний	2013
7.	Филиппов А.Ф.	Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Учебное пособие	Изд-во Ленанд	2015
8.	Камке Э.	Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям	М.: Наука	1976
9.	Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И.	Вариационное исчисление	Изд-во: «Главная редакция физико-математической литературы издательства	1973

			«Наука»	
--	--	--	---------	--

#### **4.2. Базы данных и информационно-справочные системы, в том числе зарубежные**

1. Электронный ресурс

<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000525272>

Публикация

Томск: Томский государственный университет, 2015

2. Электронный ресурс

<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000516071>

Публикация

Томск:[ИДО ТГУ], 2015

3. Электронный ресурс

[new.math.msu.su/diffur/main\\_du\\_ast.pdf](http://new.math.msu.su/diffur/main_du_ast.pdf)

4. Электронный ресурс

<http://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/2eb/diffur-arphdejbaa6.pdf>

#### **4.3. Перечень лицензионного и программного обеспечения**

Стандартное программное обеспечение.

#### **4.4. Оборудование и технические средства обучения**

Компьютер, проектор.

#### **5. Методические указания обучающимся по освоению дисциплины**

Основой обучения является курс лекций, читаемый преподавателем, а также практические занятия, заключающиеся в решении задач по соответствующей теме. Для самостоятельной работы и дополнительного расширения круга знаний рекомендуется использовать литературу, приведенную в разделе 4.1, а также информационные системы, приведенные в разделе 4.2.

#### **6. Преподавательский состав, реализующий дисциплину**

Нежелская Людмила Алексеевна, д. ф.-м. н., доцент, профессор кафедры прикладной математики НИ ТГУ.

#### **7. Язык преподавания – русский язык.**