

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математическое моделирование и информационные системы

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4 Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2 Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3 Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИОПК-3.4 Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Для текущего контроля успеваемости используются опросы по теоретическому материалу на занятиях, проверка домашних заданий, проведение контрольных работ, на которых проверяется умение студентов решать типовые задачи, выполненные контрольные работы оцениваются по пятибалльной системе. Оценка определяется в зависимости от того как студент демонстрирует умение решать предложенные задачи и обосновывать предлагаемое решение. К сдаче экзаменов студенты допускаются после получения зачета по практическим занятиям. Студенты, не имеющие задолженности в течение семестра получают зачет автоматически.

Пример контрольной работы по темам «вычисление определителей» и «обратная матрица»:

Вариант1.

Вычислить определители:

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сделать проверку.

Пример контрольной работы по векторной алгебре

Вариант 1.

1. Даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, удовлетворяющие условию

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

Зная, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 4$, вычислить

$$(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a}).$$

2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}, \vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны.

Вариант 2.

1. Дано, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы

$\vec{a} + \alpha\vec{b}, \vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ удовлетворяют условию

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

Доказать, что

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}].$$

Вариант 3.

1. Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$ перпендикулярен к вектору $\vec{a}$.

2. Даны три точки $A(2, -1, 2), B(1, 2, -1), C(3, 2, 1)$. Найти координаты векторного произведения $[\vec{AB}, \vec{BC}]$. Координаты заданы относительно декартовой системы координат.

Пример контрольной работы по теме «Канонические формы матрицы линейного оператора»

Вариант 1.

1. Привести к канонической форме Жордана матрицу

$$A_e = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Найти полярное разложение матрицы

$$A_e = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вариант 2.

1. Привести к канонической форме Жордана матрицу

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Найти полярное разложение матрицы

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Пример контрольной работы по темам «Линейные пространства», «Евклидовы пространства»

1. Доказать, что все многочлены степени не выше n , у которых свободный член равен нулю, образуют линейное подпространство пространства многочленов степени не выше n . Найти его размерность и базис.

2. Используя процедуру ортогонализации, найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $\bar{x} = [1 \ 0 \ 3 \ 0]^T$ на подпространство L , натянутое на векторы

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

В 1-ом и 2-ом семестрах предусмотрена промежуточная аттестация в форме экзамена, который разбит в связи с большим объемом изучаемого материала на две части. К экзамену допускаются только те обучаемые, которые имеют зачет по практическим занятиям. Для получения зачета по практическим занятиям необходимо выполнить все контрольные работы, "отработать" все пропущенные занятия и занятия, на которых были получены неудовлетворительные оценки. Экзамен проводится следующим образом.

Обучающемуся предлагается взять экзаменационный билет, содержащий два основных вопроса.

Контрольные вопросы для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена

Типовые экзаменационные билеты имеют следующий вид:

I семестр, первая часть экзамена

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра Прикладной математики

**Экзаменационный билет № 2 по дисциплине «Линейная алгебра и
аналитическая геометрия»**

1. Определение определителя матрицы n -го порядка . Доказать, что при перестановке столбцов матрицы определитель меняет знак на противоположный.

2. Решить систему по правилу Крамера

$$2x + 3y - z = 0,$$

$$x + 2y + 3z = 1,$$

$$x + 3y = -1.$$

Зав. каф. ПМ, д.т.н., профессор

К.И.Лившиц

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра Прикладной математики

**Экзаменационный билет № 5 по дисциплине «Линейная алгебра и
аналитическая геометрия»**

1. Теорема Крамера. Формулы Крамера.

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

Зав. каф. ПМ, д.т.н., профессор

К.И.Лившиц

I семестр, вторая часть экзамена

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра Прикладной математики

**Экзаменационный билет № 5 по дисциплине «Линейная алгебра и
аналитическая геометрия»**

1. Смешанное произведение трех векторов и его свойства.
2. Найти проекцию точки $A(4, -3, 1)$ на плоскость $5x + 3y - z - 3 = 0$.

Зав. каф. ПМ, д.т.н., профессор

К.И.Лившиц

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра Прикладной математики

**Экзаменационный билет № 13 по дисциплине «Линейная алгебра и
аналитическая геометрия»**

1. Нормальное уравнение прямой на плоскости. Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду. Расстояние от точки до прямой.
2. Составить уравнения проекции прямой

$$\begin{cases} x - 4y + 2z - 5 = 0, \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $2x + 3y - z + 2 = 0$.

Зав. каф. ПМ, д.т.н., профессор

К.И.Лившиц

II семестр, первая часть экзамена

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра Прикладной математики

**Экзаменационный билет № 8 по дисциплине «Линейная алгебра и
аналитическая геометрия»**

1. Теорема об изоморфизме линейных пространств.
2. Линейное подпространство L задано уравнениями
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 0, \\ 6x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 7x_4 - 3x_5 &= 0, \\ 9x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0, \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 5x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Найти уравнения, задающие ортогональное дополнение $L^\perp$.

Зав. каф. ПМ, д.т.н., профессор

К.И.Лившиц

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра Прикладной математики
Экзаменационный билет № 5 по дисциплине Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

1. Задание линейных подпространств системами линейных однородных уравнений.
2. Применяя процесс ортогонализации, построить ортонормированный базис подпространства, натянутого на заданную систему векторов

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{x}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Зав. каф. ПМ, д.т.н., профессор

К.И.Лившиц

II семестр, вторая часть экзамена

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра Прикладной математики

Экзаменационный билет № 1 по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

1. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен.
2. Найти квадратный корень для матрицы

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Зав. каф. ПМ, д.т.н., профессор

К.И.Лившиц

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра Прикладной математики

Экзаменационный билет № 1 по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

1. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
2. Найти ранг, дефект, ядро и образ операторов, заданного следующей матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Зав. каф. ПМ, д.т.н., профессор

К.И.Лившиц

Дополнительно обучающемуся задаются 1-3 вопроса. Примеры вопросов приведены ниже.

Дополнительные вопросы для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена

МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Определение умножения матрицы на матрицу. Свойства умножения.
2. Определение определителя матрицы n -го порядка.
3. Определение члена определителя. Определение знака члена определителя путем подсчета инверсий.
4. Определение алгебраических дополнений. Формулы разложения определителя по столбцу и строке.
7. Понятие дополнительных миноров матрицы. Связь миноров с алгебраическими дополнениями.
8. Теорема Лапласа.
9. Понятие обратной матрицы. Необходимое и достаточное условие существования. Формула вычисления.
10. Понятие ранга матрицы. Основные свойства.
11. Теорема о базисном миноре. Второе определение ранга матрицы.
12. Вычисление ранга матрицы сведением ее к канонической.
13. Понятие системы линейных уравнений. Матричная запись. Совместность и определенность.
14. Условие совместности системы (Теорема Кронекера-Капелли).
15. Формулы Крамера. Условие их применимости.
16. Понятие базисной системы. Главные и свободные неизвестные.
17. Метод Гаусса.
18. Однородные системы. Условие нетривиальной совместности.
19. Фундаментальная система решений. Связь числа фундаментальных решений с рангом системы.
20. Структура общего решения однородной и неоднородной систем.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.

1. Определение вектора. Длина вектора. Равенство векторов.
2. Сложение векторов. Свойства.
3. Умножение вектора на число. Свойства.
4. Понятие линейной зависимости векторов. Признаки линейной зависимости.
5. Понятие векторного пространства.
6. Понятие размерности векторного пространства.
6. Определение базиса и координат вектора (V_1, V_2, V_3) .
7. Условие коллинеарности векторов.
8. Аффинные и декартовы координаты точек на прямой, плоскости и в пространстве.
9. Ортогональная проекция вектора. Свойства.
10. Скалярное произведение и его свойства.
11. Векторное произведение и его свойства.
12. Смешанное произведение и его свойства.
13. Формулы преобразования базиса на плоскости и в пространстве.
14. Формулы преобразования системы координат на плоскости и в пространстве.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Понятия об уравнении линии на плоскости.
2. Понятия об уравнении поверхности
3. Понятие об уравнениях линии в пространстве.
3. Понятие алгебраической линии и алгебраической поверхности.
4. Параметрические уравнения линий
5. Параметрические уравнения поверхностей.
6. Общее уравнение прямой на плоскости.
7. Уравнение прямой на плоскости в отрезках.
8. Нормальное уравнение прямой на плоскости.
9. Определение расстояния от точки до прямой на плоскости.
10. Общее уравнение плоскости.
11. Нормальное уравнение плоскости.
12. Определение расстояния от точки до плоскости.
13. Параметрические уравнения прямой.
14. Канонические уравнения прямой.
15. Каноническое уравнение эллипса. Смысл параметров уравнения.
16. Каноническое уравнение гиперболы. Смысл параметров уравнения.
17. Каноническое уравнение параболы. Смысл параметров уравнения.
18. Каноническое уравнение эллипсоида. Смысл параметров уравнения.
19. Каноническое уравнение однополостного гиперболоида. Смысл параметров уравнения.
20. Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида. Смысл параметров уравнения.
21. Каноническое уравнение эллиптического параболоида. Смысл параметров уравнения.
22. Каноническое уравнение гиперболического параболоида. Смысл параметров уравнения.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

1. Определение отображения.
2. Определение алгебраической операции.
3. Определение обратной операции.
4. Определение группы.
5. Определение кольца.
6. Определение поля.
7. Определение изоморфных групп.

ЛИНЕЙНЫЕ, АФФИННЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

1. Определение линейного пространства.
2. Понятие линейной зависимости.
3. Понятие размерности пространства.
4. Понятия базиса пространства и координат вектора.
5. Понятие линейного подпространства.
6. Понятие линейной оболочки.
7. Задание линейных подпространств системами линейных уравнений.
4. Понятия пересечения и суммы линейных подпространств. Теоремы о размерности пересечения и суммы.
5. Определение точечно-векторного аффинного пространства.
6. Система координат в пространстве V_n .
7. Плоскость в V_n .
8. Прямая плоскость в V_n .
6. Определение евклидова пространства. Скалярное произведение.

7. Длина вектора.
8. Ортогональность. Ортонормированный базис.
9. Проектирование вектора на подпространство.
7. Понятие унитарного пространства. Свойства унитарного пространства.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

1. Понятие линейного оператора.
2. Понятия ранга и дефекта линейного оператора.
3. Построение матрицы линейного оператора.
4. Преобразование матрицы оператора при изменении базиса.
5. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
6. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен.
4. Разложение матрицы оператора простой структуры.
5. Определение инвариантного подпространства.
6. Треугольная форма матрицы оператора.
7. Понятие нильпотентного оператора. Каноническая форма матрицы нильпотентного оператора.
8. Нормальная жорданова форма, Приведение матрицы оператора к нормальной жордановой форме.
9. Сопряженный оператор.
10. Нормальные операторы. Матрица нормального оператора.
11. Унитарные операторы. Матрица унитарного оператора.
12. Самосопряженный оператор. Приведение матрицы самосопряженного оператора.

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.

1. Определение билинейной формы. Построение матрицы билинейной формы.
2. Определение квадратичной формы. Построение матрицы квадратичной формы.
3. Канонический вид квадратичной формы.
4. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
5. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду.
6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду в ортонормированном базисе.
7. Одновременное приведение к каноническому виду двух квадратичных форм.
8. Приведение к каноническому виду уравнение гиперповерхности второго порядка.
9. Закон инерции квадратичных форм.
10. Определение матрицы Грама. Свойства матрицы Грама.
11. Критерий Сильвестра.

Критерии формирования оценок при проведении экзамена

Оценки при проведении экзамена формируются в соответствии с нижеприведенной таблицей.

2	3	4	5
Не ответил ни на один из основных	Ответил на один из основных вопросов	Ответил на оба вопроса,	Уверенно и правильно ответил

вопросов.	и на один - два из трех дополнительных вопросов.	содержащихся в экзаменационном билете, и на дополнительные вопросы, но с замечаниями.	на все основные и дополнительные вопросы.
-----------	--	---	---

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Список вопросов для оценки остаточных знаний

1. Определение умножения матрицы на матрицу. Свойства умножения.
2. Определение определителя матрицы n -го порядка.
3. Определение члена определителя. Определение знака члена определителя путем
4. Определение вектора. Длина вектора. Равенство векторов.
5. Сложение векторов. Свойства.
6. Умножение вектора на число. Свойства.
7. Понятия об уравнении линии на плоскости.
8. Понятия об уравнении поверхности
9. Понятие об уравнениях линии в пространстве.
10. Определение отображения.
11. Определение алгебраической операции.
12. Определение обратной операции.
13. Определение линейного пространства.
14. Понятие линейной зависимости.
15. Понятие размерности пространства.
16. Понятие линейного оператора.
17. Понятия ранга и дефекта линейного оператора.
18. Построение матрицы линейного оператора.
19. Определение билинейной формы. Построение матрицы билинейной формы.
20. Определение квадратичной формы. Построение матрицы квадратичной формы.
21. Канонический вид квадратичной формы.

Информация о разработчиках

Лившиц Климентий Исаакович, д.т.н., профессор, профессор кафедры прикладной математики ИПМКН НИ ТГУ.