Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
И.о. директора
Д.Д. Даммер

Оценочные материалы по дисциплине

Математическая статистика

по направлению подготовки

02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Направленность (профиль) подготовки:
DevOps-инженерия в администрировании инфраструктуры ИТ-разработки

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
А.С. Шкуркин

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук

ИОПК-1.2 Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности

ИОПК-1.3 Обладает необходимыми знаниями для исследования информационных систем и их компонент

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа;

– домашняя работа;

Пример домашних заданий (ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3)

Статистическое оценивание

Задача 1. По реализации выборки $X_1,...,Xn$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.

Задача 2. По реализации выборки $X_1,...,Xn$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.

Задача 3. По реализации выборки $X_1,...,Xn$ построить оценки методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.

Задача 4. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.25, 0.11, 2.37, 3.45 из нормального закона с дисперсией, равной 0,49. Принять γ=0.96.

Задача 5. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.62, .54, 2.12, 3.72 из нормального закона с неизвестной дисперсией. Принять γ=0.98.

Задача 6. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины Х с дисперсией, равной 4, при выборке объема n =100 и выборочному среднему равному 10. Принять γ=0.97.

Задача 7. Подсчитайте ранговый коэффициент корреляции Спирмена между двумя случайными величинами Х и У по следующим данным:

X_1=1,5, X_2=2, X_3=4, X_4=1, X_5=3

$У_1$=3 , $У_2$=2, $У_3$=2,1, $У_4$=1, $У_5$=4

Задача 8. Найти достаточную статистику для: параметра распределения Пуассона, для параметров равномерного в [a,b] распределения, для параметров нормального распределения.

Проверка статистических гипотез

Задача 9. При 65 подбрасываниях монеты герб появился 25 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять уровень значимости α=0.10.

Задача 10. При 160 подбрасываниях игральной кости шестерка выпала 25 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять α=0.05.

Задача 11. При 120 подбрасываниях игральной кости пятерка выпала 25 раз, а шестерка 15 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять α=0.01.

Задача 12. Можно ли считать два потока абитуриентов однородными, если итоги экзамена по математике на каждом потоке оказались следующими:

1-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 45, 40, 70 и 35 человек;

2-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 40, 35, 65 и 30 человек.

Уровень значимости α=0,05.

Задача 13. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости α=0,1.

Задача 14. По реализации выборки -1.56, 0.22, 2.34, 3.75 из нормального закона с дисперсией, равной 0,49, и неизвестным математическим ожиданием *a* проверить гипотезы H_0: a= 1.2 и H_1: a= 2. Принять уровень значимости α=0,01.

Пример контрольной работы (по вариантам) (ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3):

Вариант 1

1. В чем отличие теории вероятностей от математической статистики. Задачи математической статистики
2. По реализации выборки X_1,...,Xn построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.
3. При 65 подбрасываниях монеты герб появился 25 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять уровень значимости α=0.10.

Вариант 2

1. Порядковые статистики;
2. По реализации выборки X_1,...,Xn построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.
3. Можно ли считать два потока абитуриентов однородными, если итоги экзамена по математике на каждом потоке оказались следующими:

1-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 45, 40, 70 и 35 человек;

2-й поток: баллы «2», «3», «4» и «5» получили соответственно 40, 35, 65 и 30 человек. Уровень значимости α=0,05.

Вариант 3

1. Эмпирическая функция распределения (э.ф.р.) для одномерной случайной величины;
2. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X с дисперсией, равной 4, при выборке объема n =100 и выборочному среднему, равному 10. Принять γ=0.97.
3. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости α=0,1.

Вариант 4

1. Общий принцип построения решающих правил.
2. По реализации выборки X1,...,Xn построить оценку методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.
3. Построить доверительный интервал для математического ожидания по реализации выборки -1.62, .54, 2.12, 3.72 из нормального закона с неизвестной дисперсией. Принять γ=0.98.

Вариант 5

1. Функция информации Фишера; неравенство Рао-Крамера.
2. Найти достаточную статистику для: параметра распределения Пуассона.
3. По реализации выборки -1.56, 0.22, 2.34, 3.75 из нормального закона с дисперсией, равной 0,49, и неизвестным математическим ожиданием a проверить гипотезы H_0: a= 1.2 и H_1: a= 2. Принять уровень значимости α=0,01.

Вариант 6

1. Критерий согласия хи-квадрат для простой гипотезы.
2. Построить доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X с дисперсией, равной 4, при выборке объема n =100 и выборочному среднему равному 10. Принять γ=0.97.
3. Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, и С. Результаты проверки изделий следующие. Предприятие А: годные – 30, негодные - 2, предприятие В: годные - 38, негодные – 3, предприятие С: годные - 54, негодные – 7. Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять уровень значимости α=0,1.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Текущий контроль проводится в середине семестра. Задания формулируются по билетам (ИОПК-1.1, ИОПК-1.2, ИОПК-1.3).

Билет № 1

1. По реализации выборки $X_1 = 0$, $X_2 = 1{,}1$, $X_3 = -1{,}1$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,15.
2. Область (-1,1) возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на пять равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 9, 15, 12, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Вычислить выборочные среднее и дисперсию по данным п.1.
4. Найти математическое ожидание и дисперсию выборочного момента k-го порядка.
5. Показать, что выборочное среднее сходится по вероятности к математическому ожиданию случайной величины при увеличении объема выборки.

Билет № 2

1. По реализации выборки $X_1 = 0{,}2$, $X_2 = 1{,}1$, $X_3 = -1{,}1$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,25.
2. Область (-2,2) возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на пять равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 10, 16, 7, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.
3. Вычислить выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса по данным п.1.
4. Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.
5. Доказать асимптотическую нормальность выборочного момента второго порядка.

Билет № 3

1. По реализации выборки $X_1 = 0{,}3$, $X_2 = 1{,}3$, $X_3 = -1{,}3$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,35.

2. Область (-1,3) возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 5, 10, 16, 9, 6. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.

3. Привести пример смещенной оценки.

4. Методом подстановки построить: оценки момента 2-го порядка, коэффициентов асимметрии и эксцесса.

5. Доказать асимптотическую нормальность эмпирической функции распределения.

Билет № 4

1. По реализации выборки $X_1 = 0{,}4$, $X_2 = 1{,}3$, $X_3 = -1{,}3$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,65.

2 Область (-1,4) возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 6, 8, 16, 9, 5. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.

3 Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.

4. Методом подстановки построить оценки момента 3-го порядка, центрального момента 3-порядка и вычислить их значения по данным п.1.

5. Доказать сходимость по вероятности эмпирической функции распределения к теоретической.

Билет № 5

1. По реализации выборки $X_1 = 0{,}5$, $X_2 = 1{,}4$, $X_3 = -1{,}4$, $X_4 = 2$, $X_5 = -2$ построить график эмпирической функции распределения, найти оценку медианы и квантили уровня 0,75.

2. Область (-2,5) возможных значений непрерывной случайной величины X разбита на шесть равных интервалов. Число наблюдений, попавших в первый, второй и т.д. интервалы, равны соответственно 6, 8, 12, 9, 5. Построить по этим данным гистограмму и полигон частот.

3. Найти среднее и дисперсию эмпирической функции распределения.

4. Методом подстановки построить оценки коэффициента асимметрии и эксцесса, вычислить их значения по данным п.1.

5. Доказать асимптотическую нормальность эмпирической функции распределения.

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все пять вопросов билета. Оценка «Хорошо» - студент ответил правильно на четыре вопроса билета. Оценка «Удовлетворительно» - студент ответил правильно на три вопроса билета. Оценка «Неудовлетворительно» – ответ студента на менее трех вопросов билета.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Статистическое оценивание

Задача 1. По реализации выборки $X_1,...,Xn$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.

Задача 2. По реализации выборки $X_1,...,Xn$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.

Задача 3. По реализации выборки $X_1,...,Xn$ построить оценки методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.

Проверка статистических гипотез

Задача 1. При 65 подбрасываниях монеты герб появился 25 раз. Можно ли считать монету симметричной? Принять уровень значимости $\alpha=0.10$.

Задача 2. При 160 подбрасываниях игральной кости шестерка выпала 25 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha=0.05$.

Задача 3. При 120 подбрасываниях игральной кости пятерка выпала 25 раз, а шестерка 15 раз. Можно ли считать кость правильной? Принять $\alpha=0.01$.

Информация о разработчиках

Дмитриев Юрий Глебович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования ИПМКН ТГУ