

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Дополнительные главы комплексного анализа

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа (ИОПК 1.2)

Далее следует описать каждый элемент (формулировки задач, темы рефератов и др.) с указанием кодов проверяемых индикаторов достижения компетенций и критерии его оценивания, привести ключи правильных ответов или принцип построения правильного ответа (по возможности).

Вариант 1.

- построить семейство отображений $f(z, \varepsilon)$ круга на круг с прямолинейным разрезом длины ε , $\varepsilon \in [0, t]$, выбрать нормировку.

- пусть $f(z)$ голоморфна в единичном круге, $f(0)=0$, $|f(z)| \leq 1$. Доказать, что если хотя бы в одной внутренней точке круга $|f(z)|=|z|$, то $f(z) = e^{i\alpha} z$.

- отобразить верхнюю полуплоскость на плоскость с исключенной вертикальной полуполосой с вершинами в точках 0 , a .

- найти максимальный радиус круга с центром в начале координат, который функций $f(z) = z + z^2$ отображается однолистно на звездную относительно нуля область;

- вычислить интеграл $\int_c \frac{dz}{(z^4 + 1)\sqrt{z^2 + 1}}$, ($\sqrt{1} = 1$) где c – парабола $y^2 = x$, проходящая

в сторону возрастания y .

Вариант 2.

- найти максимальный радиус круга с центром в начале координат, который функций $f(z) = z + z^2$ отображается однолистно на выпуклую область;

- доказать что если $f(z)$ отображает единичный круг на выпуклую область, то $zf'(z)$ отображает единичный круг на область, звездную относительно нуля;

- разложить по степеням w функцию $z = z(w)$, определенную в окрестности точки $w = 0$ уравнением Кеплера $z - a = w \sin z$, $a \neq 0, \pm\pi, \dots$

- доказать, что функции, определенные рядами

$1 + az + a^2z^2 + \dots$ и $\frac{1}{1-z} - \frac{(1-a)z}{(1-z)^2} + \frac{(1-a)^2z^2}{(1-z)^3} - \dots$ являются аналитическим

продолжением друг друга.

- найти отображение из класса S переводящее единичный круг на внутренность правильной пятиконечной звезды с центром в начале координат и одной из вершин в точке 1.

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если выполнено от 70% работы.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполнено от 50% до 70% работы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если выполнено менее 50% работы.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2, ИОПК 1.3)

Билет для зачета с оценкой содержит теоретический вопрос и задачу.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Мероморфные функции.
2. Аналитическое продолжение.
3. Необходимые и достаточные условия однолиственности
4. Лемма Шварца.
5. Принцип компактности.
6. Теорема Римана.
7. Принцип взаимно-однозначного соответствия.
8. Различные виды нормировок.
9. Принцип симметрии.
10. Принцип аргумента.
11. Принцип сохранения области.
12. Формула Шварца - Кристоффеля.

Примеры задач:

1. Отобразить на верхнюю полуплоскость полуплоску $0 < x < \pi$, $y > 0$, с разрезом вдоль луча $x = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq h$. (Использовать принцип симметрии)

2. Найти максимальный радиус круга с центром в нуле, в котором функция $e^z - 1$ однолистна.

3. В каких квадрантах лежат корни уравнения $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$?

4. Доказать, что если функция $f(z)$ отлична от константы, аналитична в области G и не обращается в нуль, то минимум $|f(z)|$ не может достигаться внутри области G .

5. Найти конформное отображение $w(z)$ угла $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi/4\}$ на круг $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$, удовлетворяющее условиям $w(1) = 0$, $\arg w'(1) = \pi$.

6. Доказать, что отображение единичного круга $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на внешность ограниченного многоугольника осуществляется функцией $f(z) = c \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1} \frac{dz}{z^2}$,

$$f(0) = \infty.$$

За ответ на зачете студент получает «отлично», если он успешно, без ошибок отвечает на весь билет. «Хорошо» ставится в случае, если ответ верен не менее, чем на 75%, «удовлетворительно» - если ответ верен не менее, чем на 50%. Если студент показывает знание менее 50% билета, то ставится оценка «неудовлетворительно». Итоги текущего контроля, выражающиеся оценкой за работу в семестре, влияют на оценку зачета. Оценка зачета получается как среднее арифметическое оценок за работу в семестре и за ответ на зачете.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы для проверки остаточных знаний могут быть использованы для формирования программы ГИА (программы государственного экзамена), а также экспертом Рособнадзора при проведении проверки диагностической работы по оценке уровня сформированности компетенций обучающихся (при контрольно-надзорной проверке). Вопросы данного раздела показывают вклад дисциплины в образовательный результат образовательной программы. Объем заданий в данном разделе зависит как от количества формируемых индикаторов достижения компетенций, так и от объема дисциплины по учебному плану.

Тестовые вопросы для оценивания остаточных знаний (ИОПК 1.3):

1. Понятие мероморфной функции
2. Что такое полная аналитическая функция?
3. Сформулировать лемму Шварца
4. Сформулировать теорему Римана
5. Сформулировать принцип компактности
6. Сформулировать принцип взаимно-однозначного соответствия.
7. Сформулировать принцип симметрии.
8. Сформулировать принцип аргумента.
9. Сформулировать принцип сохранения области.
10. Формула Шварца - Кристоффеля.
11. Риманова поверхность

Задачи (ИОПК 1.2, ИОПК 1.1):

1. Выделить однозначную голоморфную ветвь функции $w = \sqrt{z}$
2. Пусть в области $\operatorname{Re} z > 0$ задана голоморфная ветвь функции $f(z) = \sqrt[3]{z}$, удовлетворяющая условию $f(1) = 1$. Найти аналитическое продолжение функции $f(z)$ в область $\operatorname{Re} z < 0$ через полуось $(0, +i\infty)$.
3. Описать Риманову поверхность функции $w = \sqrt{z}$
4. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ на простые дроби.

Информация о разработчиках

Садритдинова Гулнора Долимджановна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Колесников Иван Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Копанев Сергей Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ