МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ
Директор института прикладной
математики и компьютерных наук
____________________А.В. Замятин
«02» июля 2021 г.

Фонд оценочных средств по дисциплине

Математическая логика и теория алгоритмов

Специальность
10.05.01 Компьютерная безопасность
код и наименование специальности

Анализ безопасности компьютерных систем
наименование профиля/специализации

Томск–2021

ФОС составил(и):
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры общей математики Н.Ю. Галанова

Рецензент:
канд. техн. наук, доцент,
зав. кафедрой компьютерной безопасности С.А. Останин

Фонд оценочных средств одобрен на заседании учебно-методической комиссии института прикладной математики и компьютерных наук (УМК ИПМКН)

Протокол от 17 июня 2021 г. № 05

Председатель УМК ИПМКН,
д-р техн. наук, профессор С.П. Сущенко

Фонд оценочных средств (ФОС) является элементом системы оценивания сформированности компетенций у обучающихся в целом или на определенном этапе ее формирования.

ФОС разрабатывается в соответствии с рабочей программой (РП) дисциплины и включает в себя набор оценочных материалов для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

1. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины

Компетенция	**Индикатор компетенции**	**Код и наименование результатов обучения** (планируемые результаты обучения, характеризующие этапы формирования компетенций)	**Критерии оценивания результатов обучения**			
			Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
ОПК-3. Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности	ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач, формулируемых в рамках базовых математических дисциплин; ИОПК-3.2 Осуществляет применение основных понятий, фактов, концепций, принципов математики и информатики для решения задач профессиональной деятельности ИОПК-3.3 Выявляет научную сущность	ОР-1. Знать язык логики нулевого порядка. Уметь доказывать Эквивалентность формул с помощью таблиц истинности и законов алгебры логики. Уметь применять алгоритмы приведения формулы к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ; проверки формулы на ТИ, ТЛ, алгоритмы проверки логического следования и связанные с ним, в том числе методом резолюций. Знать обоснование полноты метода резолюций, доказательство теоремы компактности. ОР-2. Знать понятия исчисления высказываний (секвенций): аксиомы и правила вывода, вывод. Уметь строить вывод формулы. Анализировать связь между исчислением высказываний и логикой высказываний. Разбираться в проблемах разрешимости, непротиворечивости, пол-	Полностью сформированное умение	В целом успешное, но не систематически реализуемое умение, содержащее отдельные пробелы	Частично освоенное умение	Полное отсутствие умения.

	проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и применяет соответствующий математический аппарат для их формализации, анализа и выработки решения	ноты и независимости для исчисления высказываний (секвенций). ОР-3. Владеть понятиями логики первого порядка (термы, формулы, интерпретация языка, общезначимость, логическое следование) Владеть алгоритмами приведения к Сколемовской нормальной форме, алгоритмами доказательства логического следования, доказательства общезначимости и др., в том числе методом резолюций. ОР-4. Иметь представление об исчислении предикатов. Знать примеры теорий первого порядка. ОР-5. Владеть алгоритмами элиминации кванторов в упорядоченном множестве рациональных чисел и др. ОР-6. Владеть понятиями: частично-рекурсивные, примитивно-рекурсивные, общерекурсивные функции. Анализировать и распознавать принадлежность функций к одному из этих типов. Иметь представление об алгоритмической вычислимости, тезисе Черча.				

2. Этапы формирования компетенций и виды оценочных средств

№	Этапы формирования компетенций (разделы дисциплины)	Код и наименование результатов обучения	Вид оценочного средства (тесты, задания, кейсы, вопросы и др.)
1	Логика нулевого порядка.	ОР-1	СР1. РКС СР2. КНФ, ДНФ, СКНФ, СДНФ СР3. Логическое следование СР4 Метод резолюций ИДЗ Метод рзолюций.
2	Исчисление высказываний (секвенций).	ОР-2	СР5. Выводимость
3	Логика первого порядка (логика предикатов).	ОР-3	ДЗ СР6. Предикаты. СР7. ПНФ СР8. Логическое следование. СР9. Метод резолюций. Контрольная работа.
4	Исчисление предикатов.	ОР-4	ДЗ
5	Выразимость. Элиминация кванторов.	ОР-5	ДЗ СР10. Элиминация кванторов.
6	Рекурсивные функции.	ОР-6	ДЗ

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки образовательных результатов обучения

3.1. Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине: СР1. РКС; СР2. КНФ, ДНФ, СКНФ, СДНФ; СР3. Логическое следование; СР4 Метод резолюций; ИДЗ Логика нулевого порядка; СР5. Выводимость; СР6. Предикаты; СР7. ПНФ ; СР8. Логическое следование; СР9. Метод резолюций; СР10. Элиминация кванторов. Контрольная работа «Логика первого порядка».

СР 1. РКС

Задача 11. Упростить схему:

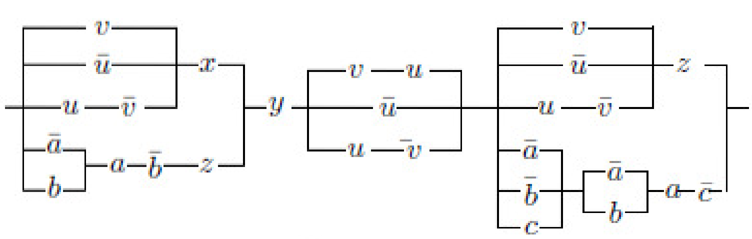

Рис. 1

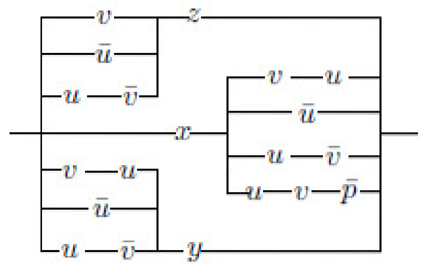

Рис. 2

СР2.+ДЗ КНФ, ДНФ, СКНФ, СДНФ

Задача 5. Найти КНФ и ДНФ формулы пользуясь эквивалентными преобразованиями

5.1. $((P \to Q) \to (Q \to (P \wedge (Q \to (P \wedge R)))))$.
5.2. $(((P \vee Q) \vee R) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)))$.
5.3. $((Q \to (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \to Q))$.
5.4. $((P \sim \neg Q) \vee R) \wedge Q$.
5.5. $((P \to Q) \to R) \to \neg P$.
5.6. $(P \wedge \neg Q) \to (Q \wedge R)$.
5.7. $(P \to \neg Q) \to (\neg Q \wedge R)$.
5.8. $((P \wedge \neg Q) \to Q) \to R$.
5.9. $P \wedge (Q \to \neg(Q \to R))$.
5.10. $((P \to R) \to Q) \wedge (P \wedge Q \to P)$.
5.11. $(\neg R \to Q) \to (P \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R)$.
5.12. $((P \wedge \neg R) \vee \neg Q) \to (R \wedge \neg(P \to Q))$.
5.13. $\neg P \wedge ((Q \vee R) \to (Q \wedge R))$.
5.14. $P \to ((Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R))$.
5.15. $\neg((\neg P \to (P \wedge \neg R)) \vee (Q \wedge R))$.
5.16. $\neg((\neg P \to (R \wedge P)) \wedge (\neg Q \to R))$.
5.17. $(P \to \neg(Q \vee P)) \wedge (Q \to R)$.

Задача 7. Записать СДНФ и СКНФ по данной таблице значений функции :

7.1. $f(P,Q,R) = [1110\,1100]$,
7.2. $f(P,Q,R) = [1000\,1100]$,
7.3. $f(P,Q,R) = [0110\,1101]$,
7.4. $f(P,Q,R) = [0111\,1100]$,
7.5. $f(P,Q,R) = [0001\,0110]$,
7.6. $f(P,Q,R) = [0010\,0101]$,
7.7. $f(P,Q,R) = [1010\,1101]$,
7.8. $f(P,Q,R) = [0010\,0101]$,
7.9. $f(P,Q,R) = [0110\,1101]$,
7.10. $f(P,Q,R) = [1011\,1001]$,
7.11. $f(P,Q,R) = [1001\,0010]$,
7.12. $f(P,Q,R) = [1101\,1001]$,
7.13. $f(P,Q,R) = [1001\,0100]$,
7.14. $f(P,Q,R) = [0110\,1110]$,
7.15. $f(P,Q,R) = [1001\,1000]$,
7.16. $f(P,Q,R) = [1011\,0110]$,
7.17. $f(P,Q,R) = [1000\,1100]$,
7.18. $f(P,Q,R) = [1101\,0110]$,
7.19. $f(P,Q,R) = [0101\,0001]$,
7.20. $f(P,Q,R) = [1000\,1111]$,
7.21. $f(P,Q,R) = [1011\,1010]$,
7.22. $f(P,Q,R) = [1001\,0100]$,

Задача 9. Выразить неизвестное высказывание X через P и Q так, чтобы данное высказывание стало тождественно истинным

9.1. $(Q \to X) \to (\neg(P \wedge Q) \wedge X)$
9.2. $(X \vee (P \wedge \neg Q)) \to (X \wedge P)$
9.3. $(\neg X \to (P \wedge Q \wedge X)) \to (X \wedge P \wedge Q)$
9.4. $(X \vee P) \to (X \wedge (Q \to P))$
9.5. $(X \vee (\neg Q \wedge X)) \to (X \wedge \neg P \wedge Q)$
9.6. $(X \vee P) \to (X \wedge (P \vee Q))$
9.7. $((X \wedge \neg P) \vee X) \to (P \wedge \neg Q \wedge X)$
9.8. $(X \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \to (X \wedge \neg(P \wedge Q))$
9.9. $(X \vee P \vee Q) \to (\neg X \to (P \wedge X))$
9.10. $(X \vee (\neg P \wedge Q)) \to (X \wedge Q)$
9.11. $(X \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \to (X \wedge (P \to Q))$
9.12. $(X \vee (P \wedge Q)) \to (X \wedge (P \to Q) \wedge (Q \to P))$
9.13. $(X \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \to (X \wedge (Q \to P))$
9.14. $(P \to (X \vee Q)) \to (X \wedge (Q \to (P \to Q)))$
9.15. $(X \vee (P \wedge \neg Q)) \to (X \wedge \neg Q)$
9.16. $(Q \to (P \vee X))) \to (((P \wedge Q) \to P) \wedge X)$

СР3+ДЗ. Установить имеет ли место логическое следование с помощью таблицы и с помощью эквивалентных преобразований.

1. Если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал.. Значит, Коля ходил в кино.
2. Если упростить схему устройства, то его стоимость снизится, а если применить новые элементы, то надежность устройства увеличится. Можно или упростить схему, или применить новые элементы (разделительное или). Однако, если упростить схему, то надежность не увеличивается, а если применить новые элементы, то стоимость не снижается. Значит, надежность увеличивается тогда и только тогда, когда стоимость не уменьшается.
3. Если в сети произойдет большой перепад напряжения, то сгорит предохранитель. Если предохранитель сгорит, то необходимо его заменить. Если телевизор включен в сеть, то телевизор работает нормально при условии целостности предохранителя. Если телевизор работает нормально, то я увижу «Новости». Следовательно: я увижу «Новости» при условии целостности предохранителя, отсутствия перепада напряжения в сети и подключения телевизора к сети питания.
4. Увеличение денег в обращении влечет за собой инфляцию. Но рост денежной массы происходит по двум причинам: из-за денежной эмиссии или снижения товарооборота. Снижение товарооборота приводит к безработице и спаду производства. Из-за инфляции падает курс денежной единицы. Следовательно: если увеличить денежную эмиссию и поднять производство, тогда избежим безработицы, и курс денежной единицы не упадёт.

СР 4. +ИДЗ Метод резолюций. Логическое следование.

Задача.1.

Установить, какие из следующих логических следствий верны:

1.1. $A \vee B \to C \wedge D, D \vee E \to F \models A \to F$

1.2. $(A \to B) \wedge (C \to D), (B \to E) \wedge (D \to F), \overline{E \wedge F}, A \to C \models \overline{A}$

1.3. $(A \to B \wedge C, \overline{B} \vee D, (E \to \overline{F}) \to \overline{D}, B \to A \wedge \overline{E} \models B \to E$

1.4. $A \to B \wedge C, \overline{B} \to C, B \to A \wedge \overline{C} \models C \to \overline{A}$

1.5. $A \to B \wedge \overline{C}, \overline{B} \to C \models (C \vee \overline{B}) \to \overline{A}$

1.6. $\overline{B} \to (A \to \overline{C}), A \wedge \overline{C} \to B \models A \to B$

1.7. $B \to \overline{A} \wedge B, C \to \overline{D}, \overline{A} \to \overline{B} \models C \to \overline{B}$

1.8. $\overline{B} \to \overline{A} \wedge C, \overline{C} \wedge B \to \overline{A} \models A \to (B \to C)$

1.9. $B \to C \vee D, D \to A, C \to \overline{B} \models B \to A$

1.10 $A \wedge B \to C, \overline{A} \wedge B \to D, \overline{B} \to E \models C \vee D$

1.11 $(B \to C \wedge D) \to E, B \to C, A \wedge B \to D \models A \to E$

1.12 $A \to B \wedge C, (B \vee C) \to D \models A \to D$

1.13 $(A \vee \overline{B}) \to \overline{D}, \overline{A} \to (B \wedge D), \overline{D} \to \overline{A} \models A \to B$

Задача.2. Найти все логические следствия из следующих посылок (с точностью до ТИ множителя, не являющиеся ТИ и не равные самим посылкам).

2.1. $x \to p, \overline{x}$

2.2. $y \to p, \overline{p}$

2.3. $y \to (x \wedge y), x$

2.4. $y \to (x \wedge y), \overline{x}$

2.5. $(x \wedge y) \to y, x$

2.6. $(x \wedge y) \to y, \overline{x}$

2.7. $(x \wedge y) \to \overline{x}, y$

2.8. $(y \vee x), \overline{x}$

2.9. $(x \vee y), \overline{y}$

2.10. $x \vee y, x \to y$

2.11. $z \vee y, z \to \overline{y}$

2.12. $(x \vee y) \to \overline{x}, y$

2.13. $(z \vee y) \to z, \overline{z}$

Задача.3.

3.1. Найти неизвестную функцию $F(x, y)$, зависящую только от переменных x, y, которая является логическим следствием посылок $x \wedge y, x \vee z, \overline{x} \to p, \overline{x} \vee p$.

3.2. Найти неизвестную функцию $F(x, z)$, зависящую только от переменных x, z, которая является логическим следствием посылок $x \wedge y, x \vee z, \overline{x} \to p, \overline{x} \vee p$.

3.3. Найти неизвестную функцию $F(x, p)$, зависящую только от переменных x, p, которая является логическим следствием посылок $x \wedge y, x \vee z, \overline{x} \to p, \overline{x} \vee p$.

3.4. Найти неизвестную функцию $F(y, z)$, зависящую только от переменных y, z, которая является логическим следствием посылок $x \wedge y, x \vee z, \overline{x} \to p, \overline{x} \vee p$.

3.5. Найти неизвестную функцию $F(y, p)$, зависящую только от переменных y, p, которая является логическим следствием посылок $x \wedge y, x \vee z, \overline{x} \to p, \overline{x} \vee p$.

3.6. Найти неизвестную функцию $F(z, p)$, зависящую только от переменных z, p, которая является логическим следствием посылок $x \wedge y, x \vee z, \overline{x} \to p, \overline{x} \vee p$.

3.7. Найти неизвестную функцию $F(x, y)$, зависящую только от переменных x, y, которая является логическим следствием посылок $x \wedge y, x \vee z, \overline{x} \to p, \overline{y} \vee p$.

3.8. Найти неизвестную функцию $F(x, z)$, зависящую только от переменных x, z, которая является логическим следствием посылок $x \wedge y, x \vee z, \overline{x} \to p, \overline{y} \vee p$.

3.9. Найти неизвестную функцию $F(x, p)$, зависящую только от переменных x, p, которая является логическим следствием посылок $x \wedge y, x \vee z, \overline{x} \to p, \overline{y} \vee p$.

3.10. Найти неизвестную функцию $F(y,z)$, зависящую только от переменных y,z, которая является логическим следствием посылок $x\,\text{Щ}y, x\,\text{Ъ}\,z, \bar{x}\,®\;p, \bar{y}\,\text{Ъ}\,p$.

3.11. Найти неизвестную функцию $F(y,p)$, зависящую только от переменных y,p, которая является логическим следствием посылок $x\,\text{Щ}y, x\,\text{Ъ}\,z, \bar{x}\,®\;p, \bar{y}\,\text{Ъ}\,p$.

3.12. Найти неизвестную функцию $F(z,p)$, зависящую только от переменных z,p, которая является логическим следствием посылок $x\,\text{Щ}y, x\,\text{Ъ}\,z, \bar{x}\,®\;p, \bar{y}\,\text{Ъ}\,p$.

3.13. Найти неизвестную функцию $F(x,y,z)$, зависящую только от переменных x,y,z, которая является логическим следствием посылок $x\,\text{Щ}y, x\,\text{Ъ}\,z, \bar{x}\,®\;p, \bar{y}\,\text{Ъ}\,p$.

Задача.4. Общая. Найти все формулы от переменных x,y, из которых логически следует формула $G(x,y) = x\,«\;y$.

СР 5. +ДЗ. Доказать следующие выводимости в дедуктике Клини.

<table>
<tr><td>$\vdash \alpha\to\alpha$</td><td>Если $\Gamma\vdash\alpha$ то $\Gamma,\alpha\vdash\beta$</td><td>$\Gamma,\alpha\vdash\alpha\vee\beta$</td><td>$\Gamma,\alpha\wedge\beta\vdash\beta$</td><td>Если $\Gamma\vdash\alpha$ и $\alpha\vdash\beta$ то $\Gamma\vdash\beta$</td></tr>
<tr><td>$\Gamma,\alpha\vdash\alpha$</td><td>$\Gamma,\bar{\bar{\alpha}}\vdash\alpha$</td><td>$\Gamma,\beta\vdash\alpha\vee\beta$</td><td>$\Gamma,\alpha,\beta\vdash\alpha\wedge\beta$</td><td>Если $\Gamma,\alpha\vdash\beta$ и $\Gamma\vdash\alpha$ то $\Gamma\vdash\beta$</td></tr>
<tr><td colspan="4">($\Gamma\vdash\alpha$ и $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$) $\Rightarrow$ $\Gamma\vdash\beta$ теорема дедукции</td><td>Если $\Gamma,\alpha\vdash\beta$ и $\Gamma,\alpha\vdash\bar{\beta}$ то $\Gamma\vdash\bar{\alpha}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если $\vdash \alpha\to\beta$ то $\vdash \bar{\beta}\to\bar{\alpha}$</td><td colspan="2">$\Gamma,\alpha,\bar{\alpha}\vdash\beta$</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Если $\Gamma,\alpha\vdash\gamma$ и $\Gamma,\beta\vdash\gamma$ то $\Gamma,\alpha\vee\beta\vdash\gamma$
(правило разбора случаев)</td><td>$\alpha\vdash\bar{\bar{\alpha}}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Если $\Gamma,\alpha\vdash\beta$ то $\Gamma,\bar{\beta}\vdash\bar{\alpha}$</td><td>$\vdash \alpha\vee\bar{\alpha}$</td></tr>
<tr><td>$\alpha,\beta\vdash\alpha\to\beta$</td><td>$\alpha,\bar{\beta}\vdash\overline{\alpha\to\beta}$</td><td>$\bar{\alpha},\beta\vdash\alpha\to\beta$</td><td>$\bar{\alpha},\bar{\beta}\vdash\alpha\to\beta$</td><td></td></tr>
</table>

ИДЗ . Методом резолюции доказать теоремы, построить дерево вывода при линейной стратегии

1) $\vdash (A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$.

2) $\vdash (A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$.

3) $\vdash (A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$.

4) $\vdash (A\to B)\to((C\to A)\to(C\to B))$.

5) $\vdash A\to(\neg A\to B)$.

6) $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$.

7) $\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$.

8) $\vdash (A \to B) \wedge (A \to \neg B) \to \neg A$.

9) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$.

10) $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to ((C \to D) \to (A \to D)))$.

11) $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$. 12) $\vdash (A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$.

13) $\vdash (A \to (B \to A)) \to A$.

14) $\vdash \neg A \vee A$.

15) $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$.

Задача 14. Доказать выводимость, используя метод резолюций.

14.1. $\Phi \vdash \Psi \to (\Phi \wedge \Psi)$.
14.2. $\Phi \to \Psi, \Phi \to X \vdash \Phi \to (\Psi \wedge X)$.
14.3. $\Phi \to X, \Psi \to X \vdash (\Phi \vee \Psi) \to X$.
14.4. $\Phi \to \Psi \vdash (X \to \Phi) \to (X \to \Psi)$.
14.5. $\Phi \to \Psi \vdash (\Phi \wedge X) \to (\Psi \wedge X)$.
14.6. $\Phi \to \Psi \vdash (\Phi \vee X) \to (\Psi \vee X)$.
14.7. $\Phi \to \Psi \vdash \Phi \to (\Phi \vee \Psi)$.
14.8. $\Phi \vee (\Phi \wedge \Psi) \vdash \Phi$.
14.9. $\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge (\neg \Phi \vee \Psi)$.
14.10. $\Phi \vee (\neg \Phi \wedge \Psi) \vdash (\Phi \vee \Psi)$.
14.11. $X \to \Phi, \Phi \to \Psi \vdash (X \wedge \Theta) \to (\Psi \vee \neg \Theta)$.
14.12. $\Phi \to X, \Psi \wedge \Phi \vdash \Theta \to X$.
14.13. $\Theta \to \Psi, \Theta \wedge \Phi \vdash (\Phi \wedge \Psi) \vee X$.
14.14. $\Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta) \vdash \Psi \wedge (\Phi \vee \neg \Theta)$.
14.15. $\Phi \vdash (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \neg \Theta)$.
14.16. $\Psi \wedge (\Phi \wedge \Theta) \vdash (\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta$.
14.17. $\Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) \vdash \Psi \vee (\Phi \vee \neg \Theta)$.
14.18. $(\Phi \wedge \Psi) \to \Theta \vdash (X \wedge \Phi) \to (\Psi \to (\Theta \vee \neg \Phi))$.
14.19. $\Phi \to \Psi \vdash (\Theta \to \Phi) \to (\Theta \wedge \neg \Psi \to \neg \Phi \vee \Psi)$.
14.20. $\Phi \vee \Psi \vdash (\Phi \to \Psi) \to (\Psi \vee \Theta)$.
14.21. $(\Phi \vee \Psi) \to \Theta \vdash (\neg \Psi \wedge \Phi) \to (\Psi \to \Theta \wedge \Psi)$.
14.22. $(\Phi \vee \neg \Psi) \to (\neg \Theta \wedge \Psi) \vdash (\Theta \vee \Phi) \to (\Psi \vee \Theta)$.
14.23. $\Phi \wedge \Psi \vdash (\Psi \to (\Theta \wedge \neg \Psi)) \to (\Theta \wedge \Psi)$.
14.24. $(\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta) \vdash \Psi \vee \Theta$.
14.25. $\Psi \wedge \Theta \vdash (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta)$.
14.26. $\neg(\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta \vdash \neg \Phi \vee \neg \Psi$.
14.27. $\neg \Phi \vee \neg(\Psi \vee \Theta) \vdash \neg(\Phi \wedge \Psi)$.
14.28. $(\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \neg \Psi) \vdash \Phi \vee \Theta$.
14.29. $\Phi \wedge \Theta \vdash (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \neg \Psi)$.
14.30. $\Phi \to (\Psi \to \Theta) \vdash (\Phi \to \neg \Theta) \to (\Phi \to \neg \Psi)$.
14.31. $\Phi \to (\Psi \to \Theta) \vdash (\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)$.
14.32. $(\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Theta) \vdash \neg \Phi \vee \Theta$.
14.33. $(P \vee Q) \to (P \wedge \neg R) \vdash R \to (\neg P \wedge \neg Q)$

СР6. Предикаты;

1).Задать область интерпретации M. Задать два предиката $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ от двух переменных на M. Выполнить все операции над предикатами (найти их области истинности).

2).Исследовать формулы языка 1 порядка $\$xP(x, y)$, $\$x"yP(x, y)$, $\$x"yP(x, y) \circledR\ "y\$xP(x, y)$ на выполнимость, опровержимость, общезначимость, противоречивость.

СР7. ПНФ.

1). $\$x"yP(x, y) \circledR\ \$x"yQ(x, y)$

2). $\$x"yP(x, y)$Ъ$\$x"yQ(x, y)$

СР8.

1).Доказать общезначимость

{$x(P(x)Щ(r ® Q(x)))} ® ({"x(P(x) ® $\overline{Q(x)}$)} ® r)

2).Доказать логическое следование

"x(P(x) ® Q(x)),"xP(x) |= "xQ(x)

"x(P(x) ® Q(x)),$x(P(x)Щ$\overline{R}$(x)) |= $x(Q(x)Щ$\overline{R}$(x))

СР9. Доказать методом резолюций

1). |= ([$xP(x, y) ® "yQ(x, y)] ® {($xP(x, y)Ъ$yR(x, y)) ® ("yQ(x, y)Ъ$yR(x, y))}

2). $x(P(x) ® Q(x)), P(t($x_1$,..., x_n)) |= Q(t(x_1,..., x_n))

3) Задать формулу $a(x)$ **содержащую кванторы, в которую переменная** x **имеет свободное вхождение и связанное вхождение, задать терм свободный для х в формуле** $a(x)$ **и доказать общезначимость формул**

"xa(x) ® a(t) ; a(t) ® $xa(x).

Контрольная работа «Логика первого порядка».

Вариант №1.

1.1. Привести к а) предварённой б) сколемовской нормальной форме формулу:
$\exists x \forall y((Q(x, y) \wedge \forall z R(x, y, z)) \to \forall z \exists x(R(x, y, z) \vee Q(z, x)))$.

1.2. Будет ли формула тождественно истинна, выполнима, опровержима или тождественно ложна:
а) $\forall y \exists x P(x, y) \to \exists x \forall y P(x, y)$,
б) $\exists x \forall y P(x, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$

1.3. Записать отрицание данного высказывания в положительной формулировке символами
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ a_n \leqslant 0\ \wedge\ f(x) \leqslant 1$.

1.4. Доказать методом резолюций общезначимость
$[\forall x(\exists y P(x, y) \vee Q(y))] \to [\exists y P(f(x), y) \vee Q(y)]$

1.5. Методом резолюций выяснить будет ли иметь место логическое следование
$\neg P(x), Q(x) \vee P(x) \models \exists x Q(x)$

1.6. Построить равносильную бескванторную формулу для $\langle \mathbb{Z}, <, =, S, 0 \rangle$
$\exists x((x = 2) \wedge (x = y + 2) \wedge (y < z))$

3.2. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Билеты по курсу Математическая логика и теория алгоритмов. Часть 1.

1	Дать определения: язык нулевого порядка, формула логики высказываний, ранг формулы. Сформулировать законы алгебры логики высказываний, доказать з-ны де Моргана. Дать определение СДНФ, СКНФ. Рассказать алгоритмы приведения к СДНФ, СКНФ.	Пусть $\alpha^\sigma = \begin{cases} \alpha, & \text{если} \quad \sigma = 1 \\ \overline{\alpha}, & \text{если} \quad \sigma = 0 \end{cases}$ Пусть α формула, все буквы которой содержатся среди букв $A_1, A_2, ..., A_k$, и φ некоторая интерпретация. Тогда $A_1^{\varphi(A_1)}, A_2^{\varphi(A_2)}, ..., A_k^{\varphi(A_k)} \mid\!- \alpha^{\varphi(\alpha)}$.
2	Дать определения: контрарная пара литер, элементарная конъюнкция, дизъюнкция, ДНФ, КНФ. Рассказать алгоритм приведения к ДНФ и к КНФ. Доказать критерий тождественной истинности формулы через КНФ (критерий ТЛ через ДНФ).	Доказать, что тавтология является выводимой формулой (в дедуктике Клини).

<table>
<tr><td>3</td><td>Дать определения: интерпретация языка нулевого порядка, продолжение интерпретации на множество формул логики высказываний. ТИ, ТЛ, выполнимость, эквивалентность на языке интерпретаций. Выполнимое (невыполнимое) множество формул, модель множества формул.</td><td>Доказать теорему о семантической полноте дедуктики Клини: для любой формулы α множества формул Γ выполняется $\Gamma \models \alpha \;\; \Rightarrow \Gamma \mid\!- \alpha$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Дать определение: формула α является логическим следствием множества формул Γ $\quad \Gamma \models \alpha$, $\varnothing \models \alpha$. Доказать принцип дедукции: $\Gamma \models \alpha \to \beta \;\; \Leftrightarrow \;\; \Gamma, \alpha \models \beta$.</td><td>Дать определение непротиворечивости исчисления (дедуктики). Доказать, что исчисление высказываний непротиворечиво.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Доказать, что следующие утверждения для произвольных формул $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta$ логики высказываний эквивалентны:
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \models \beta$; $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \models \beta$;
$\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta$; $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n, \overline{\beta}$ невыполнимо</td><td>Доказать семантическую корректность дедуктики Клини.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Дать определение: формула α выводима из множества Γ с помощью дедуктики D, вывод формулы α, Дедуктика Клини (Аксиомы 1-10, МР).</td><td>Доказать теорему компактности логики высказываний.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Доказать, следующие утверждения: для каждой формулы α выполняется $\mid\!- \alpha \to \alpha$; каждая аксиома является выводимой формулой; если $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Gamma \mid\!- \alpha$, то $\Gamma' \mid\!- \alpha$</td><td>Доказать, что любая резольвента двух данных дизъюнктов является их логическим следствием. Дать определение резолютивного вывода. Доказать теорему о семантической корректности метода резолюций.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Доказать свойства выводимости: $\Gamma, \alpha \mid\!- \alpha$ пр-ло повторения посылки; Если $\Gamma \mid\!- \alpha$, то $\Gamma, \beta \mid\!- \alpha$ пр-ло введения посылки; Если $\Gamma \mid\!- \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \mid\!- \beta$ пр-ло удаления импликации</td><td>Доказать теорему о полноте метода резолюций (в логике высказываний).</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Доказать свойства выводимости:
$\Gamma, \alpha, \beta \mid\!- \alpha \wedge \beta$ пр-ло введения конъюнкции; $\Gamma, \alpha \wedge \beta \mid\!- \alpha$; $\Gamma, \alpha \wedge \beta \mid\!- \beta$ пр-ло удаления конъюнкции; $\Gamma, \alpha \mid\!- \alpha \vee \beta$; $\Gamma, \beta \mid\!- \alpha \vee \beta$ пр-ло введения дизъюнкции</td><td>Определить операции в трёхзначной логике Лукасевича. Какие законы классической логики не выполняются в логике Лукасевича, доказать.</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Доказать свойства выводимости: $\Gamma, \overline{\overline{\alpha}} \mid\!- \alpha$ удаление отрицания; Если $\Gamma \mid\!- \alpha$, $\Gamma \mid\!- \alpha \to \beta$, то $\Gamma \mid\!- \beta$ пр-ло МР;</td><td>Определить операции в трёхзначной логике Лукасевича. Какие законы классической логики выполняются в логике Лукасевича, доказать законы де Моргана.</td></tr>
</table>

11	Доказать теорему дедукции для исчисления высказываний (в дедуктике Клини).	Дать определения: хорновский дизъюнкт, единичный дизъюнкт, позитивный дизъюнкт. Рассказать алгоритм проверки множества хорновских дизъюнктов на выполнимость (от факта).

Билеты по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2.

1.1.Дать определение терма языка 1 порядка. 1.2. Пусть сигнатура языка содержит целые числа в качестве констант, двуместные функциональные символы $+$ и $\times$, предикатный символ $\le$ и пусть x,y – переменные. Какие из следующих выражений будут термами в данной сигнатуре: А) $x\times(y+2)$ Б) x В) $x\le(y+2)$ Г) $y+2$	1.3. Доказать, что интерпретация (алгебраическая система) $\langle \mathbb{N}, =, S, 0\rangle$ допускает элиминацию кванторов. 1.4. Расскажите алгоритм приведения формулы языка 1 порядка к Сколемовской нормальной форме, приведите пример.
2.1.Дать определение сигнатуры языка 1 порядка, формулы языка 1 порядка. 2.2.Пусть сигнатура языка содержит целые числа в качестве констант, двуместные функциональные символы $+$ и $\times$, предикатный символ $\le$ и пусть x,y – переменные. Какие из следующих выражений будут формулами в данной сигнатуре: А) $x\times(y+2)$ Б) x В) $x\le(y+2)$ Г) $x\times(y+2)\le 0$	2.3. Сформулируйте теорему о подстановке терма, свободного для переменной в формуле. Докажите общезначимость формулы $\forall x\alpha(x)\to\alpha(t)$, где терм t свободен для переменной x в формуле $\alpha(x)$. 2.4. Докажите по определению равносильность $\overline{\exists xA(x)}\equiv\forall x\overline{A(x)}$
3.1.Дать определение общезначимой (тождественно истинной) формулы языка 1 порядка. 3.2. Какие из следующих формул являются общезначимыми для произвольной формулы $A(x)$ с одной свободной переменной для любой сигнатуры А) $\forall yA(y)\to\exists xA(x)$ Б) $\exists yA(y)\to\forall xA(x)$ С) $\forall y\overline{(A(y)\wedge\overline{A(y)})}$ Ответ объясните.	3.3. Дайте определение аксиоматической теории 1 порядка. 3.4. Какие вы знаете основные равносильные преобразования формул? Докажите по определению равносильность $\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\equiv\forall x(A(x)\wedge B(x))$
4.1.Дать определение выполнимой формулы языка 1 порядка. 4.2. Какие из следующих формул являются	4.3. Дайте определение вывода формулы из множества формул для аксиоматической теории.

выполнимыми для произвольной формулы $A(x)$ с одной свободной переменной А) $\forall x(A(x)\wedge\overline{A(x)})$ Б) $\exists xA(x)\to\forall yA(y)$ С) $\overline{\forall yA(y)\to\exists xA(x)}$ Ответ объясните.	4.4. Дать определение общезначимой формулы. Доказать, что из $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\ldots\wedge\alpha_n\to\beta$ общезначима, следует, что $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\ldots\wedge\alpha_n,\overline{\beta}$ невыполнимо.
5.1. Рассказать алгоритм приведения к Сколемовской нормальной форме формулы языка 1 порядка. 5.2. Доказать, что из $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\ldots\wedge\alpha_n,\overline{\beta}$ невыполнимо, следует, что $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\models\beta$	5.3. Рассказать алгоритм элиминации кванторов произвольной формулы интерпретации (алгебраической системы) $\langle ¤,=,<\rangle$. 5.4. Приведите пример элиминации кванторов для $\langle ¤,=,<\rangle$.
6.1. Дать определение истинностное значение формулы $\exists x_1P(x_1,x_2)$ языка 1 порядка в интерпретации на оценке. 6.2. Задан некоторый язык 1 порядка с константами a и b, с одноместными предикатными символами P. Пусть задана интерпретация, с областью интерпретации $M=\{a,b\}$ и интерпретация предикатов: $P(a)=1, P(b)=0$. Найдите истинностное значение формулы в данной интерпретации: $\exists xP(x)\vee\forall xP(x)$ будет ли данная формула выполнимой?	6.3. Известно, что формула $\forall x\,a(x)$ общезначима. Будет ли общезначимой формула $a(x)$. Докажите. 6.4. Дать определение (записать в символической форме), что значит, формула является логическим следствием множества формул языка 1 порядка. Доказать, что из $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\models\beta$ следует $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\ldots\wedge\alpha_n\models\beta$.
7.1.Дайте определение истинностного значения формулы $\forall x_1P(x_1,x_2)$ языка 1 порядка в интерпретации на оценке. 7.2. Пусть задан некоторый язык 1 порядка с константами a и b, с одноместными предикатными символами P и Q. Пусть задана интерпретация, с областью интерпретации $M=\{a,b\}$ и интерпретация предикатов: $P(a)=1, P(b)=1, Q(a)=1, Q(b)=0$. Найдите истинностное значение формулы в данной интерпретации: $\exists x\forall y(P(x)\wedge Q(y))$	7.3. Какая аксиоматическая теория называется исчислением предикатов? Сформулируйте теорему Гёделя о полноте для исчисления предикатов. 7.4. Дать определение (записать в символической форме), что значит множество формул является выполнимым , невыполнимым. Доказать, что из $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\ldots\wedge\alpha_n\models\beta$ следует, что множество формул $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\ldots\wedge\alpha_n,\overline{\beta}$ невыполнимо.
8.1. Дайте определение: значение терма t в интерпретации на оценке.	8.3. Дать определение общезначимой фор-

8.2. Что значит терм свободен в формуле для переменной ? Будет ли терм $t = f(x,y)$ свободен для переменной z в формулах $\forall y P(z,y) \to P(x,z)$ $\forall y P(x,y) \to P(x,z)$ $\forall z \exists y P(z,y) \to P(x,z)$	мулы. Доказать, что из $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n, \overline{\beta}$ невыполнимо следует, что $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n \to \beta$ общезначима. 8.4. Рассказать алгоритм доказательства общезначимости методом резолюций.
9.1.Дайте определение: истинностное значение формулы в интерпретации на оценке. 9.2. Будет ли формула $\exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$ общезначимой ? Докажите.	9.3. Рассказать алгоритм доказательства логического следования методом резолюций. 9.4. Приведите пример доказательства логического следования методом резолюций.
10.1. Дать определение эквивалентных (равносильных) формул языка 1 порядка. 10.2. Какие из следующих формул не являются равносильными $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$ $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ $\forall x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \forall x P(x,y)$ Докажите.	10.3. Дать определение пренексной (предварённой) нормальной формы формулы языка 1 порядка. 10.4. Рассказать алгоритм доказательства общезначимости методом резолюций.
11.1. Дать определение опровержимой формулы языка 1 порядка. 11.2. Задан некоторый язык 1 порядка с константами a и b, с одноместными предикатными символами P и Q. Пусть задана интерпретация, с областью интерпретации $M = \{a,b\}$ и интерпретация предикатов: $P(a) = 1, P(b) = 1, Q(a) = 1, Q(b) = 0$. Найдите истинностное значение формулы в данной интерпретации: "$x(P(x)$ Щ $Q(x))$. Будет ли формула опровержимой?	11.3. Рассказать алгоритм элиминации кванторов произвольной формулы интерпретации (алгебраической системы) $\langle$ ў $, =, <, S\rangle$. Приведите пример. 11.4. Докажите по определению равносильность $\overline{\text{"}xA(x)}$ є $\$x\overline{A(x)}$

Список определений.

1. Предикат задан на множестве. Операции над предикатами.
2. Сигнатура, терм, формула языка первого порядка. Атомарная (элементарная) формула. Язык 1 порядка. Булева комбинация атомарных формул.
3. Свободная переменная, связанная переменная. Замкнутая формула. $\exists$ - замыкание формулы. $\forall$ - замыкание формулы.
4. Интерпретация языка 1 порядка.

5. Оценка в интерпретации.
6. Значение терма в интерпретации на оценке.
7. Истинностное значение формулы в интерпретации на оценке.
8. Формула выполнимая в интерпретации, формула выполнимая, формула опровержимая в интерпретации, формула опровержимая.
9. Формула общезначимая (тождественно истинная), формула противоречивая(тождественно ложная).
10. Равносильные (эквивалентные) формулы языка 1 порядка.
11. Пренексная (предваренная) нормальная форма формулы языка 1 порядка.
12. Сколемовская нормальная форма языка 1 порядка.
13. Формула является логическим следствием множества формул (пустого множества).
14. Множество формул языка 1 порядка является выполнимым (совместным, непротиворечивым), невыполнимым.
15. Терм свободен для переменной в формуле.
16. Литерал. Элементарный дизъюнкт. Унификация переменных дизъюнкта.
17. Говорят, что задана аксиоматическая теория языка 1 порядка.
18. Вывод формулы из множества формул в аксиоматической теории языка 1 порядка.
19. Исчисление предикатов.
20. Интерпретация языка 1 порядка с заданной сигнатурой допускает элиминацию кванторов.

Список алгоритмов

1. Доказательство логического следования методом резолюций.
2. Доказательство общезначимости методом резолюций.
3. Приведение формулы к Сколемовской нормальной форме.
4. Элиминация кванторов для $\langle \text{ў},=,S,0\rangle$.
5. Элиминация кванторов для $\langle \text{ў},=,<,S\rangle$.
6. Элиминация кванторов для $\langle \text{¤},=,<\rangle$.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов обучения

4.1. Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Работа у доски оценивается в 1 балл.

Самостоятельные работы оцениваются по 1 баллу за каждую задачу.

Контрольная работа оценивается максимум в 16 баллов.

ИДЗ оценивается по 1 баллу за каждую задачу.

Общее ДЗ оценивается в 1 балл.

За практику Часть 1 ставится оценка в зависимости от набранных баллов. 16-21 балл - оценка 3, 22-27 баллов - оценка 4, 28-36 баллов - оценка 5

За практику Часть 2 ставится оценка в зависимости от набранных баллов. 16-21 балл - оценка 3, 22-27 баллов - оценка 4, 28-36 баллов оценка 5

4.2. Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Теоретическая Часть 1. оценивается по 5 бальной системе в зависимости от полноты ответа на основные вопросы, при спорной оценке задаётся дополнительный вопрос.

Теоретическая Часть 2. оценивается по 5 бальной системе в зависимости от полноты ответа на основные вопросы, при спорной оценке задаётся дополнительный вопрос.

Итоговая оценка выставляется как целая часть среднего арифметического всех оценок за практику и теорию.