

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:  
Декан ММФ ТГУ  
Л. В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

**Теория конформных отображений**

по направлению подготовки

**01.04.01 Математика**

Направленность (профиль) подготовки :

**Фундаментальная математика**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Магистр**

Год приема

**2023**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
П.А. Крылов

Председатель УМК  
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

## **1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

ПК-1 Способен самостоятельно решать исследовательские задачи в рамках реализации научного (научно-технического, инновационного) проекта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

ИПК 1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач

## **2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания**

Элементы текущего контроля:

– реферат;

*Примерные темы рефератов.*

– Доказательство Теоремы Римана;

– Доказательство формулы Кристоффеля-Шварца с помощью формулы Чизотти;

– Связь между различными нормировками (формулы перехода);

– Случаи интегрируемости уравнения Шварца;

– Конформные отображения на специальные классы областей.

## **3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания**

Экзамен в первом семестре проводится в устной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть - это опрос по формулировкам и определениям. Вторая часть - это теоретический вопрос, проверяющий ИОПК 1.1, ответ на который дается в развернутой форме. Третья часть - это исследовательская задача, проверяющая ИПК 1.1.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Формула Шварца для отображения единичного круга на круговой многоугольник.

2. Формула Кристоффеля–Шварца для отображения на многоугольник, прообраз одной из вершин в бесконечности.

3. Конформное отображение на ступенчатые области

4. Конформные отображения с помощью элементарных отображений. Многоугольник с границей на полярной сетке.

5. Формула Кристоффеля-Шварца для отображения на риманову поверхность.

6. Уравнение Шварца для треугольника

7. Нормировка отображения. Единственность. Однолиственность.

8. Конформное отображение на специальные области (обзор).

9. Комплексный потенциал и конформные отображения.

10. Различные виды метрик, конформная инвариантность.

11. Принцип соответствия границ.

Примеры задач:

1. Построить отображение полуплоскости на полуплоскость с разрезом, параллельным вещественной оси и уходящим на бесконечность
2. Построить отображение полуплоскости на треугольник с углами при вершинах  $\pi\theta$ ,  $\pi(1-\theta)$ ,  $0$ .
3. Построить конформное отображение полуплоскости на четырехугольник, углы выбрать так, чтобы отображение представлялось через элементарные функции.
4. Построить конформное отображение единичного круга на плоскость с двумя разрезами, продолжение разрезов пересекается под углом  $\alpha\pi$ .
5. Построить конформное отображение верхней полуплоскости на плоскость с двумя параллельными разрезами
6. Построить конформное отображение верхней полуплоскости на полуплоскость с исключенной полуплоской.
7. Построить конформное отображение единичного круга на единичный круг с исключенным кругом радиуса  $r < 1$ .
8. Построить конформное отображение круга на круг с исключенной луночкой.
9. Построить отображение единичного круга на треугольник с углами при вершинах  $-\pi(1+\theta)$ ,  $\pi\theta$ ,  $2\pi$ .
10. Построить отображение полуплоскости на треугольник с углами при вершинах  $\pi(1+\theta)$ ,  $\pi(1-\theta)$ ,  $-\pi$ .

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Итоги текущего контроля выражаются оценкой за работу в семестре и влияют на оценку за экзамен. Оценка за экзамен получается, как среднее арифметическое итоговой оценки текущего контроля и оценки за ответ на экзамене. Ответ на экзамене оценивается следующим образом. Студент получает «отлично», если он успешно, без ошибок отвечает по каждой части билета. «Хорошо» ставится в случае, если ответ верен не менее, чем на 75%, «удовлетворительно» - если ответ верен не менее, чем на 50%. Если студент показывает знание менее 50% билета, то ставится оценка «неудовлетворительно».

#### 4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

##### Задачи (ИОПК-2.1)

Задача 1. Найти образ области  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$  относительно отображения  $f(z) = \frac{z-3+i}{z+1+i}$ .

Задача 2. Найти относительно отображения Жуковского образ внутренности кругового многоугольника (граница состоит из отрезков полярной сетки координат) с вершинами  $P_1 = 2$ ,  $P_2 = 2_1 e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $P_3 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $P_4 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ,  $P_5 = \frac{1}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$  и  $P_6 = \frac{1}{2}$ ;

Задача 3. Найти относительно показательного отображения образ внутренности многоугольника с вершинами  $P_1 = -\ln 2 - \pi i$ ,  $P_2 = -\pi i$ ,  $P_3 = 0$ ,  $P_4 = 4$ ,  $P_5 = 4 + \pi i$  и  $P_6 = -\ln 2 + \pi i$ ;

##### Теоретические вопросы:

1. Локальная однолиственность.
2. Принцип симметрии.
3. Единственность конформного отображения между односвязными областями.
4. Гиперболическая метрика.
5. Жорданова граница.
6. Формула Кристоффеля-Шварца.

### **Информация о разработчиках**

Садритдинова Гулнора Долимджановна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Колесников Иван Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ

Копанев Сергей Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ