Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Пространства последовательностей и базисы

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки
«Фундаментальная математика»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
П.А.Крылов

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ИПК-1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

– ИОПК-1.1. Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– индивидуальные задания (ИОПК1.1)

– контрольная работа (ИОПК1.1)

Индивидуальное задание 1

Для успешного прохождения задания необходимо:

1. Решить верно предложенные преподавателем задачи.

2. При собеседовании с преподавателем, ответить на предложенные вопросы.

Вариант 1

1. Являются ли последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полными в пространстве l_2 и C[0,1] соответственно?
   a) $f_n = (0, 0, \ldots 0, \underset{n}{1}, 1, 0, \ldots)$;
   b) $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$.
2. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$ минимальной
   $f_1 = (1, 0, 0, \ldots..)$; $f_n = (1, 0, \ldots 0, \underset{n}{\frac{1}{n}}, 0, \ldots)$, $\quad n \geq 2$
3. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ базисом в c_0, где $f_n = \{0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots\}$.
4. Для данного фрейма:
   a) Найти фреймовый оператор S
   b) Найти оператор обратный к S
   c) Найти фреймовы границы
   d) Разложить произвольный элемент по фрейму.

$$f_1 = (0,1) \qquad f_2 = (1,-1) \qquad f_3 = (-1,1)$$

Вариант 2

1. Являются ли последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полными в пространстве l_2 и C[=1,1] соответственно?

   a) $f_n = (0, 0, \ldots 0, \underset{n}{1}, -1, 0, \ldots)$;

b) $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$.

2. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$ минимальной

$f_n = (\underbrace{1,1,\ldots 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$;

3. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ базисом в пространстве ***c***

$f_n = \{0,\ldots,0,\underset{n}{1},0,\ldots\}$

4. Для данного фрейма:
a) Найти фреймовый оператор S
b) Найти оператор обратный к S
c) Найти фреймовы границы
d) Разложить произвольный элемент по фрейму.

$$f_1 = (0,1) \quad f_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad f_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Вариант 3

1. Являются ли последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полными в пространстве l_2 и C[0,1] соответственно?

a) $f_1 = (1,0,0,\ldots..)$; $f_n = (1,0,\ldots,0,\underset{n}{1},0,\ldots), \quad n \geq 2$;

b) $\{t^{2n}\}_{n=0}^{\infty}$.

2. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$ минимальной

$f_n = (\underbrace{1,-1,1,\ldots(-1)^{n-1}}_{n}, 0, ..)$

3. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ базисом в l_∞

$f_n = \{0,\ldots,0,\underset{n}{1},0,\ldots\}$.

4. Для данного фрейма:
a) Найти фреймовый оператор S
b) Найти оператор обратный к S
c) Найти фреймовы границы
d) Разложить произвольный элемент по фрейму.

$$f_1 = (1,1) \quad f_2 = (-1,1) \quad f_3 = (1,-1)$$

Вариант 4

1. Являются ли последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полными в пространстве е l_2 и C[-1,1] соответственно?

a) $f_1 = (1,0,0,\ldots..)$; $f_n = (1,0,\ldots 0,\underset{n}{-1},0,\ldots), \quad n \geq 2$;

b) $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$ минимальной

$$f_1 = (1,0,0,.....)\,;\;\; f_n = \left(\frac{1}{n},0,...0,\underset{n}{1},0,...\right),\quad n \geq 2\,.$$

3. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ базисом в l_1

$$f_n = \{0,...,0,\underset{n}{1},0,...\}\,.$$

4. Для данного фрейма:
a) Найти фреймовый оператор S
b) Найти оператор обратный к S
c) Найти фреймовы границы
d) Разложить произвольный элемент по фрейму.

$$f_1 = (1,0,0),\; f_2 = \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right), f_3 = \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right), f_4 = (0,0,1)$$

Вариант 5

1. Являются ли последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полными в пространстве l_2 и C[0,1] соответственно?

a) $f_n = \left(0,0,...0,\underset{n}{1},\frac{1}{n},0,...\right)$;

b) $\{t^{2n}\}_{n=0}^{\infty}$.

2. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$ минимальной

$$f_n = \left(0,...,0,\underset{n}{\frac{1}{n}},\frac{1}{n+1},0,0,...\right).$$

3. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ базисом в пространстве l_2

$$f_n = \{0,...,0,\underset{n}{1},0,...\}\,.$$

4. Для данного фрейма:
a) Найти фреймовый оператор S
b) Найти оператор обратный к S
c) Найти фреймовы границы
d) Разложить произвольный элемент по фрейму.

$$f_1 = \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right),\; f_2 = \left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right),\; f_3 = \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\; f_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Индивидуальное задание 2

Для успешного прохождения задания необходимо:

1. Решить верно предложенные преподавателем задачи.

2. При собеседовании с преподавателем, ответить на предложенные вопросы.

Вариант 1

Из данной последовательности $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset l_p$ или c_0 извлечь подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ и построить проектор P: $l_p \to sp\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ или проектор P: $c_0 \to sp\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, где

а) $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ \frac{1}{n}, 0, \dots)$ в l_1 б) $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ \frac{1}{n}, 1,0,0, \dots)$ в c_0

Вариант 2

Из данной последовательности $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset l_p$ или c_0 извлечь подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ и построить проектор P: $l_p \to sp\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ или проектор P: $c_0 \to sp\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, где

а) $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ \frac{1}{n}, 1,0,0, \dots)$ в l_1 б) $x_n = (\underbrace{0,0,\dots 0,}_{\mathrm{N}} 1,1,0,0, \dots)$ в c_0

Вариант 3

Из данной последовательности $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset l_p$ или c_0 извлечь подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ и построить проектор P: $l_p \to sp\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ или проектор P: $c_0 \to sp\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, где

а) $x_n = (\underbrace{0,0,\dots 0,}_{n} 1,1,0,0, \dots)$ в l_1 б) $x_n = (\underbrace{0,0,\dots 0,}_{n} 1, \frac{1}{n}, 0,0, \dots)$ в c_0

Вариант 4

Из данной последовательности $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset l_p$ или c_0 извлечь подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ и построить проектор P: $l_p \to sp\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ или проектор P: $c_0 \to sp\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, где

а) $x_n = (\underbrace{0,0,\dots 0,}_{n} 1, \frac{1}{n}, 0,0, \dots)$ в l_1 б) $x_n = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \frac{1}{2}, 0,0, \dots)$ в c_0.

Вариант 5

Из данной последовательности $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset l_p$ или c_0 извлечь подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ и построить проектор P: $l_p \to sp\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ или проектор P: $c_0 \to sp\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, где

а) $x_n = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \frac{1}{2}, 0,0, \dots)$ в l_1 б) $x_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots \frac{1}{2},} 1,,0,0, \dots)$ в c_0

Индивидуальное задание 3

Для успешного прохождения задания необходимо:

1. Решить верно предложенные преподавателем задачи.

2. При собеседовании с преподавателем, ответить на предложенные вопросы.

Вариант 1

1.. Доказать, что пространство l_2^2 не является изометрически изоморфным пространству l_1^2

2. Пусть P – произвольный проектор пространства c на c_0. Докажите, что ||P||≥ 2.

Вариант 2

1.. Доказать, что пространство l_2^3 не является изометрически изоморфным пространству l_1^3

2. Построить подпространство E $\subset$ C$[0,1]$, изометричное c_0 и проектор P: C[0,1]→ E.

Вариант 3

1.. Доказать, что пространство l_3^2 не является изометрически изоморфным пространству l_1^2

2. Можно ли пространство c_0 изоморфно вложить в пространство ℓ_1?.

Вариант 4

1.. Доказать, что пространство l_∞^2 является изометрически изоморфным пространству l_1^2

2. Докажите, что пространство C[0,1] дополняемо не вкладывается в пространство ℓ_∞.

Вариант 5

1.. Доказать, что пространство l_∞^2 не является изометрически изоморфным пространству l_2^2

2. Можно ли пространство ℓ_1 изоморфно вложить в пространство c_0?

Контрольная работа

вариант 1

1. Докажите, что пространство $(\ell_1 \times \ell_1 \times \dots)_{c_0}$ не изоморфно пространству ℓ_1.
2. Докажите, что пространство $(l_\infty \times l_\infty \times \dots)_{\ell_1}$ не изоморфно пространству ℓ_1.

вариант 2

1. Докажите, что пространство $(c_0 \times c_0 \times \dots)_{\ell_1}$ не изоморфно пространству c_0
2. Докажите, что пространство $(l_\infty \times l_\infty \times \dots)_{\ell_1}$ не изоморфно пространству l_∞

3. Оценочные материалы итогового контроля и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов и задачи. Первый опрос- формулировка теоремы, доказательство теоремы, следствия. Второй вопрос – задача на доказательство с использованием теорем, изученных в данном курсе. Третий вопрос на исследование свойств последовательности элементов в конкретном нормированном пространстве (сильная, слабая сходимость, базисность, полнота, минимальность, бесселевость).

Перечень теоретических вопросов:

1. Базис Гамеля. Мощность базиса Гамеля в банаховых пространствах.
2. Дополняемые подпространства в $l_p,\ p \geq 1$.
3. Определение базиса Шаудера. Примеры базисов в банаховых пространствах.
1. Недополняемость пространства c_0 в l_∞.
2. Непрерывность проекционных операторов. Базисная константа.
3. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве.
4. Построение базиса по проекционным операторам
5. Метризуемость банахового пространства в w-топологии.
6. Критерий Гринблюма.
7. Метризуемость сопряженного пространства в w*-топологии.
8. ω-независимые и минимальные системы. Связь между ω-независмостью и минимальностью.

12. Теорема Бессаги-Пелчинского о базисных последовательностях

13. Биортогональные системы. Связь с минимальностью. Примеры.
14. Принцип малых отклонений.
15. Полные системы. Критерий полноты в гильбертовом пространстве
16. Определение фрейма в гильбертовом пространстве. Существование фрейма в конечномерных пространствах
17. Пример полной минимальной системы, не являющейся базисом.
18. Фреймовы операторы в конечномерном пространстве.
19. Базисные последовательности. Эквивалентные и конгруэнтные базисные последовательности.
20. Границы фрейма. Связь с собственными числами фреймова оператора.
21. Блок-базисы. Примеры.
22. Теорема Эберлейна-Шмульяна.
23. Существование базисных последовательностей в банаховых пространствах.
24. Примеры фреймов. Жесткие фреймы
25. Универсальность пространства $C[0,1]$.
26. Предельные и w-предельные точки базисных последовательностей.
27. Бесселевы последовательности в гильбертовом пространстве.
28. Слабая безусловная сходимость рядов в банаховых пространствах.
29. Дополняемы подпространства в c_0. Теорема Собчика
30. Безусловно сходящиеся ряды в банаховых пространствах.
31. Пространство l_1. Теорема Шура.
32. Базисы Рисса в гильбертовых пространствах

Задачи на доказательство

1. Доказать, что не существует изоморфизма T: $\ell_3 \to \ell_2$.
2. Доказать, что пространство ℓ_1^2 не является изометрически изоморфным пространству ℓ_2^2.
3. Доказать, что не существует изоморфизма T: ℓ_3 в $\ell_{1.}$
4. Доказать, что пространство ℓ_2^3 не является изометрически изоморфным пространству ℓ_3^3.
5. Доказать, что не существует изоморфизма T: $\ell_1 \to \mathrm{c}_0$.
6. Доказать, что пространство ℓ_1^2 не является изометрически изоморфным пространству ℓ_3^2.

7. Докажите, что пространство $(\ell_1 \times \ell_1 \times \dots)_{\mathrm{c}_0}$ не изоморфно пространству ℓ_1.
8. Пусть P – произвольный проектор пространства c на c_0. Докажите, что $\|\mathrm{P}\| \geq 2$.
9. Докажите, что пространство $(\mathrm{c}_0 \times \mathrm{c}_0 \times \dots)_{\ell_1}$ не изоморфно пространству ℓ_1.
10. Построить подпространство $\mathrm{E} \subset \mathrm{C}[0,1]$, изометричное c_0 и проектор P: $\mathrm{C}[0,1] \to c_0$.
11. Докажите, что пространство $(\ell_1 \times \ell_1 \times \dots)_{\mathrm{c}_0}$ не изоморфно пространству . c_0.

12.Можно ли пространство c_0 изоморфно вложить в пространство ℓ_1.

13.Докажите, что пространство $(c_0 \times c_0 \times \dots)_{\ell_1}$ не изоморфно пространству c_0

14. Докажите, что пространство C[0,1] дополняемо не вкладывается в пространство ℓ_∞.

Задачи на исследование свойств последовательностей

1. В пространствах C[-1,1], C[0,1], L_2[-1,1], L_2[0,1] исследовать следующие системы на минимальность, полноту, бесселевость, базисность и найти биортогональные последовтельности.
   a) $\{e^{t-n}: n \in N\}$;
   b) $\{t^n: n \in N\}$;
   c) $\{e^{t/n}: n \in N\}$;
   d) $\{t^{2n}: n \in N\}$;
   e) $\{e^{nt}: n \in N\}$.

2. В пространстве l_2 исследовать следующие системы на минимальность, полноту, бесселевость, базисность и найти биортогональные последовтельности.
   a) $f_n=(1,0,\ldots,0,\underset{n}{1},0,\ldots)$, $n \in N$;
   b) $f_n=(1,0,\ldots,0,\underset{n}{-1},-1,0,\ldots)$, $n \in N$;
   c) $f_n=(0,\ldots,0,1,-1,\underset{n}{0},\ldots)$, $n \in N$;
   d) $f_n=(1/n,\ldots,\underset{2n}{1/n}, 0,0,\ldots)$, $n \in N$;
   f) $f_n=(0,0,\ldots,0,1,\underset{n}{1/n},0,\ldots)$, $n \in N$;

3. Найти фреймовый оператор, границы фрейма и разложить произвольный элемент для следующих фреймов:
   a) $\{e_1, e_2, e_3, e_1+e_2+e_3\} \subset C^3$
   b) $\{e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, e_3\} \subset C^3$
   c) $\{e_1, e_1+e_2, e_1-e_2, e_3, -e_3\} \subset C^3$
   d) f1=(3/4, 1/4, 1/4, 1/4)
      f2=(1/4, 3/4, 1/4, 1/4)
      f3=(1/4, 1/4, 3/4, 1/4)
      f4=(1/4, 1/4, 1/4, 3/4)
      f5=(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)

Критерии оценивания

Оценка «отлично» выставляется за выполненные индивидуальные задания в семестре и ответы на все вопросы на экзамене.

Оценка «хорошо» выставляется за выполненные индивидуальные задания в семестре и ответ на два вопроса на экзамене

Оценка «удовлетворительно» выставляется за выполнение индивидуальных заданий и ответ на один вопрос на экзамене

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест

1. Являются ли последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полными в пространстве l_2 и $C\,[-1,1]$ соответственно?

a) $f_1 = (1,0,0,.....)$; $f_n = (\frac{1}{n},0,...0,\underset{n}{1},0,...), \quad n \geq 2$;

b) $\{e^{nt^2}\}_{n=0}^{\infty}$.

2. Является ли последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$ минимальной

$$f_1 = (1,0,0,.....);\; f_n = (1,0,...0,\underset{n}{-1},0,...), \quad n \geq 2.$$

3. Является ли последовательность $\{t^{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ базисом в пр-ве $C\,[0,1]$.

4. Для данного фрейма:
   a) Найти фреймовый оператор S
   b) Найти оператор обратный к S
   c) Найти фреймовы границы
   d) Разложить произвольный элемент по фрейму.

$$f_1 = (1,0,0),\; f_2 = (1,1,0),\; f_3 = (0,1,-1),\; f_4 = (0,1,1)$$

5. Дополняемо ли пространство c_0 в пространстве C[0,1]?
6. Дополняемо ли пространство c_0 в пространстве l_∞?
7. Следует ли из базисности последовательности её минимальность?
8. Является ли полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве базисом?
9. Является ли конечная полная система в конечномерном пространстве
   a) базисом?
   b) фреймом?
10. Является ли система функций $\{1, \sin nt, \cos nt : n \in \mathbb{N}\}$ базисом в пространстве C[$-\pi, \pi$]? (норма в пространстве C[$-\pi, \pi$] задаётся формулой $||x|| = \sup\{|x(t)| : t \in [\pi, \pi]\}$)

Ключи

1. a) Да
   b) Нет
2. Нет
3. Нет

4. a) $S=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

b) $S^{-1}=\begin{pmatrix}3/5 & -1/5 & 0\\ -1/5 & 2/5 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$

c) $A=2, B=3$

d) $x=\frac{3x_1-x_2}{5}f_1+\frac{2x_1+x_2}{5}f_2+\left(-\frac{x_1}{5}+\frac{2x_2}{5}-\frac{x_3}{2}\right)f_3+\left(-\frac{x_1}{5}+\frac{2x_2}{5}+\frac{x_3}{2}\right)f_4$

5. Да
6. Нет
7. Да
8. Да
9. a) Не всегда, только если система линейно независима
   b) Да
10. Нет

Тест считается выполненным, если получены ответы на 8 из 15-ти вопросов.

Информация о разработчиках

Хмылёва Татьяна Евгеньевна, канд. физ.-мат. наук, доцент, ММФ ТГУ, доцент кафедры математического анализа и теории функций.