

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УТВЕРЖДЕНО:  
Декан ММФ ТГУ  
Л.В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине  
Численные методы в задачах экологии, медицины, механики  
сплошных сред

Направление подготовки  
**01.04.01-Математика**

Направленность (профиль) подготовки  
**Математический анализ и моделирование (Mathematical Analysis and Modelling)**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
Магистр

Год приема  
**2023**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
А.В.Старченко

Председатель УМК  
Е.А.Тарасов

## 1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

- ИПК-1.1. Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач;
- ИОПК-1.1. Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

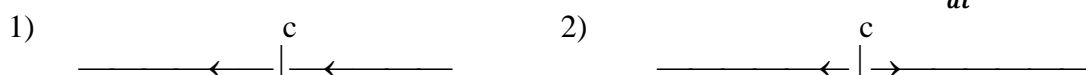
## 2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

- тесты;
- индивидуальные задания;
- подготовка сообщения о новых публикациях по экологическим проблемам в медицине;
- написание реферата на указанную тему.

### ТЕСТ (ИОПК-1.1).

1. Как называется один из возможных фазовых портретов для единственной изолированной неподвижной точки равновесия  $x = c$  уравнения  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ :



Одно из возможных названий фазового портрета: а) шунт; б) репеллер; в) аттрактор.

Ключи: 1 а); 2 б).

2. Исследование характера фазовых траекторий в окрестности точки равновесия линейной автономной системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (1)$$

Единственная точка равновесия системы (1) (0,0).

Определите, когда эта особая точка будет:

- 1) устойчивым узлом?
- 2) Устойчивым фокусом?
- 3) Центром?

Выберите ответ из следующих вариантов:

корни характеристического уравнения системы (1):

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

- а) вещественные, одного знака (оба положительные);
- б) вещественные, одного знака (оба отрицательные);
- в) вещественные, разных знаков (первый-положительный, второй-отрицательный);
- г) вещественные, разных знаков (первый-отрицательный, второй-положительный);
- д) комплексно-сопряженные, вещественная часть меньше нуля;
- е) мнимые;
- ж) комплексно-сопряженные, вещественная часть больше нуля.

Ключи: 1 б); 2 д); 3 е); 4 а); 5 ж); 6 в), г).

Критерии оценивания: тест считается пройденным, если обучающийся ответил правильно как минимум на половину вопросов.

## Индивидуальные задания (ИОПК-1.1, ИПК-1.1).

Перечень теоретических вопросов

1. Основной недостаток математической модели Мальтуса.
2. Достоинство логистической модели по сравнению с моделью Мальтуса.
3. Основное достоинство и недостаток математической модели Гомпертца.
4. Определение устойчивого и неустойчивого узла.
5. Понятие устойчивого и неустойчивого фокуса.
6. Определение устойчивости по Ляпунову для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
7. Определение погрешности аппроксимации.
8. Определение устойчивости разностной схемы.
9. Определение сходимости решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

**Задание 1.** Исследовать одну из точечных математических моделей, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) с соответствующим начальным условием, на устойчивость по поведению особых точек и, применяя численные методы решения задачи Коши для ОДУ, получить решение задачи на ПЭВМ, сравнив его с точным решением.

**1.Задача № 1.** Модель Мальтуса:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = f(N,t), \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

где  $N$  – численность популяции,  $t$  – время,  $f(N,t) = \alpha \cdot N$ .

**2.Задача № 2.** Модель Гомпертца:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = f(N,t), \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

где  $f(N,t) = \alpha \cdot N(\ln(K) - \ln(N))$ , где  $\alpha$  – коэффициент прироста численности популяции,  $K$  – предельно допустимая величина численности.

**3. Задача № 3.** Логистическая модель (Ферхюльста):

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = f(N,t), \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

где  $f(N,t) = (\alpha - \gamma \cdot N) \cdot N$ .

**Задание 2.** Исследовать одну из точечных математических моделей, описываемую системой ОДУ с соответствующими начальными условиями, на устойчивость по поведению особых точек и, применяя численные методы решения задачи Коши для ОДУ, получить решение задачи на ПЭВМ, сравнив его с точным решением.

**Задача № 1.** Классическая модель Вольтерра:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{w}}{dt} = \bar{f}(\bar{w},t), \\ \bar{w}(0) = \bar{w}^0, \end{cases}$$

где  $\bar{w} = (x, y)^T$ ,  $\bar{f} = (f_1, f_2)^T$ ,  $\bar{w}^0 = (x_0, y_0)^T$ ,  
 $f_1 = \lambda_1 x - v(x) \cdot y$ ,  $f_2 = k \cdot v(x) \cdot y - \lambda_2 y$ .

**Задача №2.** Классическая модель Вольтерра с учетом внутривидовой конкуренции среди жертв.

**Задача №3.** Классическая модель Вольтерра с учетом внутривидовой конкуренции среди хищников.

**Задание 3.** Модифицировать математические модели задания 1 и задания 2, вводя в ОДУ (или систему ОДУ) конвективные и диффузионные члены. Применить численные методы решения краевой задачи, описываемой уравнениями в частных производных. Исследовать вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости разностного метода, реализовать его на ПЭВМ. Проанализировать полученные результаты и сравнить их с результатами численного решения задания 1 и задания 2.

**Задача № 1.** Модификация модели Мальтуса и классической модели Вольтерра.

**Задача № 2.** Модификация модели Гомпертца и классической модели Вольтерра с учетом внутривидовой конкуренции среди жертв.

**Задача № 3.** Модификация модели Ферхюльста и классической модели Вольтерра с учетом внутривидовой конкуренции среди хищников.

Ответы.

Задание 1:

1. С увеличением времени  $t$  величина  $N$  растет экспоненциально.
2. С увеличением времени  $t$  значение  $N$  устанавливается на некотором постоянном значении.
3. Результат решения задачи 3 аналогичен решению задачи 2.

Задание 2:

1. При условии, что параметры системы подбираются из условия, что точка равновесия системы является устойчивым фокусом, на графике, построенном по результатам численных расчетов в фазовой плоскости, получится закручивающаяся спираль.
2. При выполнении условий пункта 4 получается результат аналогичный результату пункта 4.
3. При выполнении условий пункта 4 получается результат аналогичный результату этого пункта.

Задание 3:

- 1., 2., 3. Ответ на результат решения этих задач заложен в постановке этих задач.

**Подготовка сообщения о новых публикациях по экологическим проблемам в медицине (ИПК-1.1).**

Подбор и работа магистрантов над новыми публикациями по экологическим проблемам в медицине, подготовка докладов на основании проделанной работы и выступление с ними на практических занятиях по экологии. **Обсуждение докладов** присутствующими.

**Написание реферата на указанную тему (ИПК-1.1).**

В качестве тем рефератов могут быть экологические темы, связанные с:

1. Изменением климата на Земле, обусловленное антропогенным фактором.
2. Нехваткой пресной воды.
3. Загрязнением речных водоемов.

**Критерии оценивания:**

По каждому индивидуальному заданию в течение 3 семестра защищается отчет. В конце 3 семестра выставляется итоговая оценка. Защита отчета, а так же другие элементы текущего контроля максимально могут быть оценены 5 баллами. Критерии оценки экзамена по дисциплине «Численные методы решения задач экологии, медицины, механики сплошных сред» приведены в таблице 1.

Система оценивания ответа на теоретические вопросы экзамена по соответствующим темам дана в таблице 1. Баллы, полученные за ответы на теоретические вопросы и решение задач, суммируются и берется среднеарифметическая оценка.

Таблица 1

Содержание отчета и ответ на вопросы билета и по теме практической работы (индивидуальному заданию) является содержательным, четко, ясно, кратко изложенным. Студент правильно понимает и использует терминологию. Знает основные подходы и методы, используемые при решении задач, уверенно владеет математическим аппаратом. Демонстрирует умение понимать, доказательно и логически связно отвечать на вопросы.	5 баллов
Содержание отчета и ответ на вопросы билета и по теме практической работы (индивидуальному заданию) и экзаменационному вопросу является содержательным, однако изложен недостаточно четко, ясно и кратко. Студент правильно понимает, но неуверенно использует терминологию. Знает основные подходы и методы, используемые при решении задач, но не достаточно уверенно владеет математическим аппаратом. Демонстрирует умение понимать, доказательно и логически связно отвечать на вопросы.	4 балла
Содержание отчета и ответ на вопросы билета и по теме практической работы (индивидуальному заданию) и экзаменационному вопросу является содержательным, однако изложен недостаточно четко, ясно и кратко. Студент правильно понимает, но неуверенно использует терминологию. Знает некоторые подходы и методы, используемые при решении задач, не достаточно уверенно владеет математическим аппаратом. Демонстрирует ограниченные умения понимать суть вопросов, однако пользуясь наводящей информацией частично отвечает на вопросы.	3 балла
Содержание отчета и ответ на вопросы билета и по теме практической работы (индивидуальному заданию) и экзаменационному вопросу является неполным, изложен недостаточно четко и ясно. Студент ограниченно понимает и неуверенно использует терминологию. Не четко знает подходы и методы, используемые при решении задач. Слабо владеет математическим аппаратом. Демонстрирует неспособность понимать суть вопросов, даже пользуясь наводящей информацией. частично отвечает на вопросы.	2 балла

### Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

1. Понятие об экологии и о математической экологии.
2. О простейших математических моделях экологии («портновская» модель П.Л. Чебышева, модель кровообращения Л. Эйлера и др.).
3. Об истории развития математической экологии.
4. Построить фазовый портрет уравнения

$$\frac{dx}{dt} = (x - 1)(x - 2).$$

5. Глобальные проблемы экологии: а) разрушение природной среды; б) загрязнение атмосферы; в) загрязнение почвы; г) загрязнение воды; д) проблема озонового слоя; е) проблема кислотных осадков; ж) проблема парникового эффекта; з) проблема перенаселения планеты; и) энергетическая проблема; к) сырьевая проблема. Пути решения экологических проблем.
6. Типы биотических отношений (а) ++; б) + 0; в) + -; г) 0 0; д) 0 -; е) - -).

Примеры, пояснения.

7. Основные свойства популяции.
8. Простейшая модель эпидемии:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(N + 1) - x,$$

$$x(0) = x_0.$$

9. Простейшие атмосферные модели:

- а) уравнение адвекции;
- б) атмосферные модели, описываемые ОДУ первого порядка (уравнение колебаний и фрикционное уравнение);
- в) простейшие численные методы для ОДУ первого порядка: схема Эйлера, неявная схема Эйлера, схема трапеций, схема Мацуно, схема Хойна, схема центральных разностей, схема Адамса-Бэшфорда.

Система оценивания итогового/промежуточного контроля по дисциплине такова, что достигаются запланированные компетенции ИОПК-1.1, ИПК-1.1. Оценка результатов итоговой/промежуточной аттестации проводится по правилам, приведенным в Таблице 1.

**Примеры экзаменационных билетов по дисциплине «Численные методы решения задач экологии, медицины, механики сплошных сред»**

#### Билет № 1

1. Осуществить исследование устойчивости процессов, описываемых моделью Мальтуса (1797 г.).
2. Основные свойства популяции.
3. Защита отчета по индивидуальному заданию.

Зав. каф. ВМиКМ

профессор Старченко А.В.

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Механико-математический факультет

#### Билет № 2

1. Осуществить исследование устойчивости процессов, описываемых моделью Гомпертца (1825 г.).
2. Определение популяции. Привести примеры.
3. Защита отчета по индивидуальному заданию.

Зав. каф. ВМиКМ

профессор Старченко А.В.

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Механико-математический факультет

#### Билет № 3

1. Осуществить исследование устойчивости процессов, описываемых логистической моделью.
2. Межвидовая конкуренция. Привести примеры.
3. Защита отчета по индивидуальному заданию.

Зав. каф. ВМиКМ

профессор Старченко А.В.

Экзаменационный билет состоит из трех частей.

Первая и вторая части содержат по одному вопросу, проверяющему ИПК-1.1. Ответы на вопросы первых двух частей даются в развернутом виде.

Третья часть-защита одного из трех (по выбору студента) индивидуальных заданий, выполняемых в течение 3-го семестра, проверяющих ИОПК-1.1 и ПК-1. При ответе на вопросы третьей части студент дает краткую характеристику полученных численных результатов.

В качестве дополнительных вопросов можно использовать ТЕСТ, проверяющий ИОПК-1.1.

Перечень теоретических вопросов:

1. Введение в экологию. Что такое экология? Определения экологии. Три группы основных экологических факторов, составляющие среду.
2. Абиотические факторы (четыре группы).
3. Основные разделы современной экологии: а) факторальная экология; б) популяционная экология; в) биогеоценология.
4. Использование дифференциально-разностного уравнения для изучения влияния пространственных разностей на характер решения разностной задачи (на примере уравнения адвекции).

Примеры задач, входящих в три индивидуальных задания, приведены в разделе **индивидуальные задания (ИОПК-1.1, ИПК-1.1)**.

Результаты экзамена определяются оценками, условия получения которых приведены в Таблице 1.

#### 4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

##### ТЕСТ (ИОПК-1.1).

1. Как называется один из возможных фазовых портретов для единственной изолированной неподвижной точки равновесия  $x = c$  уравнения  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ :



Одно из возможных названий фазового портрета: а) шунт; б) репеллер; в) аттрактор.

Ключи: 1 в); 2 а);

2. Исследование характера фазовых траекторий в окрестности точки равновесия линейной автономной системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (1)$$

Единственная точка равновесия системы (1) (0,0).

Определите, когда эта особая точка будет:

- 1) Неустойчивым узлом?
- 2) Неустойчивым фокусом?
- 3) Неустойчивым седлом.

Выберите ответ из следующих вариантов:

корни характеристического уравнения системы (1):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} - \lambda & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} - \lambda \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

- а) вещественные, одного знака (оба положительные);
- б) вещественные, одного знака (оба отрицательные);
- в) вещественные, разных знаков (первый-положительный, второй-отрицательный);
- г) вещественные, разных знаков (первый-отрицательный, второй-положительный);
- д) комплексно-сопряженные, вещественная часть меньше нуля;
- е) мнимые;
- ж) комплексно-сопряженные, вещественная часть больше нуля.

Ключи: 1 а); 2 ж); 3 в), г).

Критерии оценивания: тест считается пройденным, если обучающийся ответил правильно как минимум на половину вопросов.

Задачи

Задача 1 (ИОПК-1.1, ИПК-1.1)

1. О периодичности процесса, описываемого моделью «хищник-жертва».

Показать, что

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \text{ где } T - \text{ период.}$$

2. Логистическая модель (Ферхюльста):

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = f(N, t), \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

где  $f(N, t) = (\alpha - \gamma \cdot N) \cdot N$ .

Определите точное решение задачи Коши.

Ответ:

$$N(t) = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}}{1 + \left(\frac{\alpha}{\gamma N_0} - 1\right)e^{-\alpha t}}$$

3. Модель Розенцвейга:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = f(N, t), \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

где  $f(N, t) = \alpha N \left(1 - \frac{N^q}{b}\right)$ ,  $q, b$ - константы, причем  $0 < q < 1$ .

Определите точное решение задачи Коши.

Ответ:

$$N(t) = K e^{-\ln\left(\frac{K}{N_0}\right)e^{-\alpha t}}$$

Теоретические вопросы:

1. Свойство популяции-плотность (ИОПК-1.1).



- Ответ должен содержать одно из определений популяции, понятие плотности популяции и когда это понятие используется.
2. Провести сравнение конкуренции и паразитизма (ИОПК-1.1).  
В ответе должно содержаться, что такое конкуренция и что такое паразитизм. Необходимо привести примеры такого рода взаимоотношений.
  3. Три экологических фактора, воздействия на окружающую среду (ИОПК-1.1).  
Ответ должен содержать название этих факторов и примеры, иллюстрирующие результат их воздействия.
  4. Предмет изучения популяционной экологии (ИОПК-1.1, ИПК-1.1).  
В ответе необходимо дать определение популяции, важность популяционного подхода для практических нужд и что изучает популяционная экология.

### **Информация о разработчиках**

Михайлов Михаил Дмитриевич-старший преподаватель кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования