

МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ

Директор института прикладной  
математики и компьютерных наук

А.В. Замятин



2023 г.

Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине  
(Оценочные средства по дисциплине)

**Дифференциальные и разностные уравнения**

по направлению подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) подготовки:

**Прикладная математика и инженерия цифровых проектов**

ОС составил:

д-р техн. наук, профессор,  
профессор кафедры прикладной информатики

В.В. Поддубный

Рецензент:

д-р техн. наук, профессор,  
Заведующий кафедрой прикладной информатики

С.П. Сущенко

Оценочные средства одобрены на заседании учебно-методической комиссии института прикладной математики и компьютерных наук (УМК ИПМКН).

Протокол от 8 июня 2023 г. №2

Председатель УМК ИПМКН,  
д-р техн. наук, профессор

С.П. Сущенко

**Оценочные средства (ОС)** являются элементом системы оценивания сформированности компетенций у обучающихся в целом или на определенном этапе ее формирования.

ОС разрабатывается в соответствии с рабочей программой (РП) дисциплины.

### 1. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины

Компетенция	Индикатор компетенции	Код и наименование результатов обучения (планируемые результаты обучения, характеризующие этапы формирования компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
			Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.  ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках	ОР-1. Обучающийся владеет навыками работы с учебной литературой по теории дифференциальных уравнений (ДУ).	Владеет навыками критического анализа учебной информации по основным разделам теории дифференциальных уравнений (ДУ).	Владеет навыками самостоятельного изучения отдельных разделов учебной литературы по теории дифференциальных уравнений (ДУ).	Владеет навыками воспроизведения освоенного учебного материала по основным разделам теории дифференциальных уравнений (ДУ)	Не владеет навыками поиска учебной литературы по теории дифференциальных уравнений (ДУ), в т.ч., с использованием электронных ресурсов

<p>ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.</p>	<p>базовых математических и естественнонаучных дисциплин</p> <p>ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой</p> <p>ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности</p> <p>ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.</p>	<p>ОР-2. Обучающийся умеет выполнять стандартные действия-разделять переменные и интегрировать обыкновенные ДУ первого и более высокого порядка.</p> <p>ОР-3. Обучающийся знает основные определения, теоремы существования и единственности решения ДУ различных типов; знает методы интегрирования обыкновенных ДУ и уравнений в частных производных.</p>	<p>Умеет интегрировать обыкновенные ДУ первого и более высокого порядка повышенной сложности, умеет решать задачу Коши.</p> <p>Имеет целостное представление о содержании курса «Дифференциальные уравнения», знает формулировки и доказательства теоремы существования и единственности решений ДУ, знает методы интегрирования и может применить их на практике</p>	<p>Умеет доводить решение обыкновенного ДУ первого и более высокого порядка повышенной сложности до вычисления неопределенных интегралов-кватратур</p> <p>Имеет представление о содержании курса «Дифференциальные уравнения», знает формулировки и доказательства теоремы существования и решений ДУ, знает методы интегрирования и может применить их на практике</p>	<p>Умеет интегрировать типовые обыкновенные ДУ</p> <p>Имеет поверхностное представление о содержании курса «Дифференциальные уравнения», знает формулировки теоремы, знает методы интегрирования уравнений, но не может применить их на практике</p>	<p>Не умеет выполнять стандартные действия при интегрировании обыкновенного ДУ</p> <p>Не знает определений, формулировок теорем, не знает методы интегрирования ДУ.</p>
--	---	---	---	---	--	---

	<p>ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.</p> <p>ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.</p> <p>ИОПК-3.4. Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности.</p>					
--	---	--	--	--	--	--

## 2. Этапы формирования компетенций и виды оценочных средств

№	Этапы формирования компетенций (разделы дисциплины)	Код и наименование результатов обучения	Вид оценочного средства (тесты, задания, кейсы, вопросы и др.)
1.	Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной и не разрешённые относительно производной	<p>ОР-1. Обучающийся <b>владеет</b> навыками работы с учебной литературой по теории ДУ.</p> <p>ОР-2. Обучающийся <b>умеет</b> выполнять стандартные действия-разделять переменные и интегрировать обыкновенные ДУ первого и более высокого порядка.</p> <p>ОР-3. Обучающийся <b>знает</b> основные определения, теоремы существования и единственности решения ДУ различных типов; <b>знает</b> методы интегрирования обыкновенных ДУ и уравнений в частных производных.</p>	Вопросы, задачи, примеры уравнений
2.	Уравнения порядка выше первого с переменными коэффициентами	<p>ОР-1. Обучающийся <b>владеет</b> навыками работы с учебной литературой по теории ДУ.</p>	Вопросы, задачи, примеры уравнений
3.	Уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами и приводящиеся к ним	<p>ОР-1. Обучающийся <b>владеет</b> навыками работы с учебной литературой по теории ДУ.</p>	Вопросы, задачи, примеры уравнений
4.	Краевые задачи. Приближённые решения дифференциальных уравнений	<p>ОР-1. Обучающийся <b>владеет</b> навыками работы с учебной литературой по теории ДУ.</p> <p>ОР-2. Обучающийся <b>умеет</b> выполнять стандартные действия-разделять переменные и интегрировать обыкновенные ДУ первого и более высокого порядка.</p> <p>ОР-3. Обучающийся <b>знает</b> основные определения, теоремы существования и единственности решения ДУ различных типов; <b>знает</b> методы интегрирования обыкновенных ДУ и уравнений в частных производных.</p>	Вопросы, задачи, примеры уравнений
5.		<p>ОР-1. Обучающийся <b>владеет</b> навыками работы с учебной литературой по теории ДУ.</p>	Вопросы, задачи, примеры уравнений и систем

	Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами		уравнений
6.	Устойчивость	ОР-1. Обучающийся <b>владеет</b> навыками работы с учебной литературой по теории ДУ.	Вопросы, задачи, примеры уравнений и систем уравнений
7.	Уравнения в частных производных первого порядка	ОР-1. Обучающийся <b>владеет</b> навыками работы с учебной литературой по теории ДУ.	Вопросы, задачи, примеры уравнений
8.	Вариационное исчисление	ОР-1. Обучающийся <b>владеет</b> навыками работы с учебной литературой по теории ДУ.	Вопросы, задачи, примеры уравнений, систем уравнений и функционалов

### 3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки образовательных результатов обучения

3.1. Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине

Комплекты типовых контрольных заданий имеют следующий вид.

#### Контрольная работа № 1

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной

#### Вариант 1

Решить уравнения:

1.  $\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2.$
2.  $(e^y + 2xy)dx + (e^y + x)xdy = 0.$
3.  $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2} dx.$
4.  $y' = 3x + \sqrt{y - x^2}.$
5.  $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1.$

### Вариант 2

Решить уравнения:

1.  $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0.$
2.  $[2x - \ln(y + 1)]dx - \frac{x + y}{y + 1} dy = 0.$
3.  $(3xy + x + y)ydx + (4xy + x + 2y)xdy = 0.$
4.  $xy' + 1 = ex - y.$
5.  $y' = -y^2 + 1 + x^2.$

### Контрольная работа № 2

Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной. Дифференциальные уравнения порядка выше первого

#### Вариант 1

Решить уравнения:

1.  $x(y'^2 + e^{2y}) = -2y'.$
2.  $3y'^3 - xy' + 1 = 0.$
3.  $xyy'' + yy' + x^2 y'^3 = 0.$
4.  $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$  – методом вариации постоянных.
5.  $y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$  – методом неопределённых коэффициентов.

#### Вариант 2

Решить уравнения:

1.  $(yy')^3 = 27x(y^2 - 2x^2)$
2.  $(xy' - y)^3 = y'^3 - 1.$
3.  $\left(\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2}\right)^2 - x\left(\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2}\right) + \frac{y'}{y} = 0.$

4.  $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$  – методом вариации постоянных.
5.  $y'' - 4y' + 4y = x^2$  – методом неопределённых коэффициентов.

### 3.2. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Предусмотрена промежуточная аттестация в форме зачёта. При проведении промежуточной аттестации в форме зачёта обучающемуся даётся два вопроса из приводимого ниже перечня.

Контрольные вопросы для проведения промежуточной аттестации в форме зачета

**Задание 1.** Дано обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

- 1) Найти общее аналитическое решение ДУ, приведя в отчёте все промежуточные выкладки и пояснения.
- 2) Выделить из общего решения ДУ решение задачи Коши с начальным условием  $(x_0, y_0)$  и получить формулу, выражающую постоянную интегрирования  $c_0$  через  $x_0, y_0$ .
- 3) Задать численное значение начального условия  $(x_0, y_0)$  и границу  $x_{fin}$  интервала интегрирования.
- 4) Найти численное решение задачи Коши с использованием встроенной в Matlab (или FreeMat) процедуры `ode45` интегрирования ДУ по методу Рунге-Кутты 4-го порядка точности с заданной точностью  $1e-8$ .
- 5) Проверить правильность аналитического решения задачи Коши по невязке аналитического решения на численном решении (вывести невязку на график и объяснить, правильно ли получено аналитическое решение).
- 6) Вывести на графики интегральную кривую  $y(x)$  (в координатах  $(x, y)$ ) и фазовую траекторию (в координатах  $(y, f(x, y))$ ) решения задачи Коши, где  $f(x, y)$  – правая часть ДУ, разрешённого относительно производной.
- 7) Привести в отчёте листинг программы (в текстовом виде, чтобы его можно было скопировать и вставить в редактор системы программирования), скриншоты её исполнения и все полученные графики со всеми объяснениями.

**Задание 2.** Дана  $2 \times 2$ -матрица  $A$  коэффициентов системы линейных однородных дифференциальных уравнений.

- 1) Записать систему ДУ в векторно-матричной форме.
- 2) Составить систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений.
- 3) По матрице  $A$  построить характеристическое уравнение, исходя из его определения.
- 4) По виду характеристического уравнения построить ДУ второго порядка, эквивалентное системе ДУ.
- 5) Решить характеристическое уравнение и найти собственные числа матрицы  $A$ .
- 6) Построить общее аналитическое решение системы ДУ.
- 7) Определить тип тривиальной точки покоя системы.

- 8) Выделить из общего решения ДУ решение задачи Коши с начальным условием  $(x_0, y_0)$  и найти постоянные интегрирования в виде формул их зависимости от начальных условий.
- 9) Задать численное значение начального условия  $(x_0, y_0)$  и границу  $x_{fin}$  интервала интегрирования.
- 10) Найти численное решение задачи Коши с использованием встроенной в Matlab (FreeMat) процедуры ode45 интегрирования ДУ по методу Рунге-Кутты 4-го порядка точности с заданной точностью  $1e-8$ .
- 11) Проверить правильность аналитического решения задачи Коши по невязке аналитического решения на численном решении (вывести невязки каждой компоненты решения на графики и объяснить, правильно ли получено аналитическое решение).
- 12) Вывести на графики интегральные кривые  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  (в координатах  $(x, y)$ ) и фазовую траекторию (в координатах  $(y_1, y_2)$ ) решения задачи Коши.
- 13) Привести в отчёте листинг программы (в текстовом виде, чтобы его можно было скопировать и вставить в редактор системы программирования), скриншоты её исполнения и все полученные графики со всеми объяснениями.

#### **4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов обучения**

4.1. Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

За контрольную работу ставится «зачёт», если решены все задания предложенного варианта.

4.2. Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Видом промежуточной аттестации является зачет. Оценка за зачет выставляется на основе выполненных лабораторных и контрольных работ. Ниже приведены критерии формирования оценок при проведении зачёта.

**Зачтено.** Обучающийся показал творческое отношение к обучению, в овладел всеми теоретическими вопросами, показал все требуемые умения и навыки при решении задач или частично показал основные умения и навыки при решении задач. Все пункты задания выполнены правильно. Оценка зачтено также ставится при условии того, что обучающийся имеет недостаточно глубокие знания по теоретическим разделам дисциплины, показал не все основные умения и навыки при решении задач. Не все пункты задания выполнены правильно, ответы содержат ошибки и неточности.

**Незачтено.** Обучающийся имеет существенные пробелы по отдельным теоретическим разделам дисциплины и не владеет основными умениями и навыками при решении задач. Задания не выполнены или выполнены неправильно.