МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ
Директор института прикладной
математики и компьютерных наук
____________ А.В. Замятин
«02» ____________ 2021 г.

Фонд оценочных средств по дисциплине

Дифференциальные и разностные уравнения

по направлению подготовки

02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Направленность (профиль) подготовки :
DevOps-инженерия в администрировании инфраструктуры ИТ-разработки

Томск–2021

ФОС составила
д-р физ.-мат. наук, доцент,
профессор кафедры прикладной математики Л.А. Нежельская

Рецензент:
д-р физ.-мат. наук, профессор,
профессор кафедры прикладной математики А.Г. Дмитренко

Оценочные средства одобрены на заседании учебно-методической комиссии института прикладной математики и компьютерных наук (УМК ИПМКН).

Протокол от от 17 июня 2021 г. № 05

Председатель УМК ИПМКН,
д-р техн. наук, профессор С.П. Сущенко

Фонд оценочных средств (ФОС) является элементом системы оценивания сформированности компетенций у обучающихся в целом или на определенном этапе ее формирования.

ФОС разрабатывается в соответствии с рабочей программой (РП) дисциплины.

1. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины

Компетенция	**Индикатор компетенции**	**Код и наименование результатов обучения** (планируемые результаты обучения, характеризующие этапы формирования компетенций)	**Критерии оценивания результатов обучения**			
			Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.	ОР-1.1.1. Обучающийся **владеет** навыками работы с учебной литературой по теории дифференциальных уравнений (ДУ).	Владеет навыками критического анализа учебной информации по основным разделам теории дифференциальных уравнений (ДУ).	Владеет навыками самостоятельного изучения отдельных разделов учебной литературы по теории дифференциальных уравнений (ДУ).	Владеет навыками воспроизведения освоенного учебного материала по основным разделам теории дифференциальных уравнений (ДУ),	Не владеет навыками поиска учебной литературы по теории дифференциальных уравнений (ДУ), в т.ч., с использованием электронных ресурсов

	ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.	ОР-1.2.1. Обучающийся **умеет** выполнять стандартные действия-разделять переменные и интегрировать обыкновенные ДУ первого и более высокого порядка.	Умеет интегрировать обыкновенные ДУ первого и более высокого порядка повышенной сложности, умеет решать задачу Коши.	Умеет доводить решение обыкновенного ДУ первого и более высокого порядка повышенной сложности до вычисления неопределенных интегралов-квадратур	Умеет интегрировать типовые обыкновенные ДУ	Не умеет выполнять стандартные действия при интегрировании обыкновенного ДУ
	ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.	ОР-1.3.1. Обучающийся **знает** основные определения, теоремы существования и единственности решения ДУ различных типов; **знает** методы интегрирования обыкновенных ДУ и уравнений в частных производных.	Знает целостное представление о содержании курса «Дифференциальные уравнения», умеет формулировать и доказывать теоремы существования и единственности решений ДУ, знает методы интегрирования и может применить их на практике	Знает представление о содержании курса «Дифференциальные уравнения», умеет формулировать и частично доказывать теоремы существования и единственности решений ДУ, знает методы интегрирования и может применить их на практике	Знает поверхностное представление о содержании курса «Дифференциальные уравнения», умеет формулировать теоремы, знает методы интегрирования уравнений, но не может применить их на практике	Не знает определений, формулировок теорем, не знает методы интегрирования ДУ.

2. Этапы формирования компетенций и виды оценочных средств

№	Этапы формирования компетенций (разделы дисциплины)	Код и наименование результатов обучения	Вид оценочного средства (тесты, задания, кейсы, вопросы и др.)
1.	**Раздел 1.** Обыкновенные дифференциальные уравнения (ДУ) первого порядка	ОР-1.1.1. Обучающийся **владеет** навыками работы с учебной литературой по теории ДУ. ОР-1.2.1. Обучающийся **умеет** выполнять стандартные действия-разделять переменные и интегрировать обыкновенные ДУ первого и более высокого порядка. ОР-1.3.1. Обучающийся **знает** основные определения, теоремы существования и единственности решения ДУ различных типов; **знает** методы интегрирования обыкновенных ДУ и уравнений в частных производных.	Вопросы, задачи, примеры уравнений
2.	**Раздел 2.** Разностные уравнения и методы приближенного интегрирования ДУ	ОР-1.1.1. Обучающийся **владеет** навыками работы с учебной литературой по теории ДУ.	Вопросы, задачи, примеры уравнений

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки образовательных результатов обучения

3.1. Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине

Комплекты типовых контрольных заданий имеют следующий вид.

Контрольная работа № 1

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной

Вариант 1

Решить уравнения:

1. $\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2.$
2. $\left(e^y + 2xy\right)dx + \left(e^y + x\right)xdy = 0.$
3. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2}\,dx.$

4. $y' = 3x + \sqrt{y - x^2}$.
5. $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$.

Вариант 2

Решить уравнения:

1. $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0.$
2. $[2x - \ln(y+1)]dx - \dfrac{x+y}{y+1}dy = 0.$
3. $(3xy + x + y)ydx + (4xy + x + 2y)xdy = 0.$
4. $xy' + 1 = ex - y.$
5. $y' = -y^2 + 1 + x^2.$

Контрольная работа № 2

Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной. Дифференциальные уравнения порядка выше первого

Вариант 1

Решить уравнения:

1. $x\left(y'^2 + e^{2y}\right) = -2y'.$
2. $3y'^3 - xy' + 1 = 0.$
3. $xyy'' + yy' + x^2 y'^3 = 0.$
4. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$ – методом вариации постоянных.
5. $y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$ – методом неопределённых коэффициентов.

Вариант 2

Решить уравнения:

1. $(yy')^3 = 27x\left(y^2 - 2x^2\right).$
2. $(xy' - y)^3 = y'^3 - 1.$
3. $\left(\dfrac{y''}{y} - \dfrac{y'^2}{y^2}\right)^2 - x\left(\dfrac{y''}{y} - \dfrac{y'^2}{y^2}\right) + \dfrac{y'}{y} = 0.$
4. $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}$ – методом вариации постоянных.
5. $y'' - 4y' + 4y = x^2$ – методом неопределённых коэффициентов.

Комплекты типовых контрольных заданий имеют следующий вид.

Контрольная работа № 1

Краевая задача. Функция Грина. Системы дифференциальных уравнений

Вариант 1

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5x + y = 7e^{y} - 27, \\ \dfrac{dy}{dt} - 2x + 3y = -3e^{t} + 12. \end{cases}$ – методом Эйлера и МНК

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^{t} + e^{-t}. \end{cases}$ – методом исключения и методом вариации постоянных

3. $\dot{X} = A_1 X$, $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ – матричным методом

Решить краевую задачу

4. $y'' + y' = 1;\ \ y'(0) = 0,\ \ y(1) = 1.$

Построить функцию Грина для краевой задачи

5. $x^2 y'' + 5xy' + 3y = f(x),\ \ y'(1) = 0,\ \ y(x) = O\left(x^{-2}\right)$ при $x \to +\infty.$

Вариант 2

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 2x + y = 2e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} - 3x + 2y = 4te^{2t}. \end{cases}$ – методом Эйлера и МНК

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 2\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$ – методом исключения и методом вариации постоянных

3. $\dot{X} = A_1 X$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – матричным методом

Решить краевую задачу

4. $x^2 y'' - 6y = 0;\ \ y(0)$ ограничено, $y(1) = 2.$

Построить функцию Грина для краевой задачи

5. $x^2 y'' + xy' - y = f(x),\ \ y(1) = 0,\ \ y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.

Контрольная работа № 2

Уравнения в частных производных первого порядка. Устойчивость. Вариационное исчисление

Вариант 1

1. Решить уравнение $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \left(2e^x - y\right)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, удовлетворяющее условиям $z = y,\ \ x = 0.$
2. При каких значениях a и b асимптотически устойчиво решение $x = 0$, $y = 0$ системы $\dot{x} = \left(a^2 - b\right)x + (b+1)y,\ \ \dot{y} = -b^2 x + b^2 y.$
3. Исследовать на устойчивость по первому приближению решение $x = 0$, $y = 0$ системы $\dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2$, $\dot{y} = -2x + \sin y + e^x x^2$.
4. Найти кратчайшее расстояние между окружностью $x^2 + y^2 = 1$ и прямой $x + y = 4.$
5. Найти экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(360x^2 y - y''^2\right)dx,\quad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 2{,}5.$$

Вариант 2

1. Решить уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0,$ удовлетворяющее условиям $u = yz,\ \ x = 1.$
2. При каких значениях a и b асимптотически устойчиво решение $x = 0$, $y = 0$ системы $\dot{x} = ax + by,\ \ \dot{y} = -bx + (a-2)y.$
3. Исследовать на устойчивость по первому приближению решение $x = 0$, $y = 0$ системы $\dot{x} = -\sin x + 3y + x^5$, $\dot{y} = \dfrac{1}{4}x - 2y - \dfrac{1}{6}y^3.$
4. Найти кратчайшее расстояние между окружностью $x^2 + y^2 = 1$ и гиперболой $y = \dfrac{5}{x}.$
5. Найти экстремали функционала

$$J[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi} \left(2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2\right)dx,\quad y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 1,\ \ z(0) = 0,\ \ z(\pi) = 1.$$

3.2. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

В 3-ом и 4-ом семестрах предусмотрена промежуточная аттестация в форме зачёта. При проведении промежуточной аттестации в форме зачёта обучающемуся даётся три вопроса из приводимого ниже перечня.

Контрольные вопросы для проведения промежуточной аттестации в форме зачёта

Раздел «УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЁННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ И НЕ РАЗРЕШЁННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ»

1. Изоклины.

2. Определение обыкновенного дифференциального уравнения. Порядок уравнения. Понятие первого и общего интеграла дифференциального уравнения.

3. Построение дифференциального уравнения для геометрической и физической задачи.

4. Определение уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными. Типы уравнений, приводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными.

5. Определение однородного уравнения. Понятие однородной функции.

6. Линейные уравнения первого порядка. Определение уравнения Бернулли и уравнения Риккати.

7. Определение уравнения в полных дифференциалах. Определение интегрирующего множителя. Уравнения в полных дифференциалах и с интегрирующим множителем.

8. Определение уравнения, не разрешённого относительно производной.

9. Особые точки и особые решения. Понятие дискриминантной кривой.

10. Графическое построение особых кривых уравнения, разрешённого относительно производной.

11. Метод введения параметра при интегрировании уравнения, разрешённого относительно производной.

Раздел «УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВОГО С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ»

1. Определение уравнения порядка выше первого.

2. Уравнение, не содержащее искомую функцию. Замена переменных и сведение исходного уравнения к уравнению с новой неизвестной функцией.

3. Уравнение, не содержащее независимого переменного (в явном виде). Замена переменных и интегрирование уравнения с новым независимым переменным и новой неизвестной функцией.

4. Интегрирование исходного уравнения путём выделения в нём полной производной от некоторого дифференциального выражения.

5. Определение однородного относительно неизвестной функции и всех её производных уравнения. Замена переменных, позволяющая понизить порядок уравнения на единицу.

6. Определение обобщённого однородного уравнения. Соответствующая замена переменных, понижающая порядок уравнения на единицу.

7. Решение указанного типа уравнений с заданными начальными условиями.

Раздел «УРАВНЕНИЯ N-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРИВОДЯЩИЕСЯ К НИМ»

1. Определение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.

2. Однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Определение характеристического уравнения. Различные случаи корней характеристи-ческого уравнения. Запись общего решения уравнения для этих случаев.

3. Метод неопределённых коэффициентов при построении частного решения неоднородного уравнения. Правило построения частного решения.

4. Метод вариации произвольных постоянных при интегрировании неоднородного уравнения.

5. Однородное уравнение Эйлера. Сведение его к уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного.

6. Неоднородное уравнение Эйлера.

7. Интегрирование уравнение с комплексными коэффициентами.

Раздел «КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

1. Решение краевых задач.

2. Решение краевых задач методом функции Грина.

2. Представление решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда.

3. Нахождение приближённого решения дифференциального уравнения в виде ряда по степеням малого параметра.

4 семестр

Раздел «СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ»

1. Определение системы дифференциальных уравнений.

2. Нахождение интегрируемых комбинаций.

3. Метод Эйлера. Запись общего решения однородной системы для различных случаев корней характеристического уравнения.

4. Метод исключения для интегрирования однородной и неоднородной системы.

5. Метод Д’аламбера.

6. Матричный метод для интегрирования однородной системы. Определение жордановой клетки матрицы. Приведение матрицы системы к каноническому виду.

7. Метод неопределённых коэффициентов при построении вектора частных решений неоднородной системы.

8. Метод вариации произвольных постоянных.

Раздел «УСТОЙЧИВОСТЬ»

1. Определение устойчивости решения уравнения (системы уравнений) по Ляпунову. Определение точки покоя системы. Определение асимптотической устойчивости.

2. Построение функции Ляпунова при исследовании на устойчивость тривиального решения системы с применением теоремы Ляпунова об устойчивости, теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и теоремы Четаева о неустойчивости.

3. Типы особых точек.

4. Исследование на устойчивость тривиального решения системы по первому приближению.

5. Исследование на устойчивость тривиального решения системы с коэффици-ентами, заданными в параметрической форме.

6. Исследование на устойчивость тривиального решения системы с использованием теоремы Гурвица.

Раздел «УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА»

1. Определение линейного однородного и квазилинейного уравнения от функции n переменных. Первый интеграл. Характеристики.
2. Свойство равных дробей.
3. Интегрирование уравнения в частных производных путём сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.
4. Нахождение поверхности, удовлетворяющей заданному уравнению и проходя-щей через данную линию.

Раздел «ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

1. Определение функционала. Определение вариации функционала.
2. Простейшая задача вариационного исчисления с неподвижными границами. Уравнение Эйлера.
3. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
4. Система уравнений Эйлера для функционалов, зависящих от нескольких функций.
5. Уравнение Эйлера-Пуассона для функционалов, зависящих от производных высших порядков.
6. Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами.
7. Условия трансверсальности в общем случае в задаче со скользящими концами.

В 3-ем и 4-ом семестрах предусмотрена промежуточная аттестация в форме экзамена, который проводится следующим образом. Обучающемуся предлагается взять экзаменационный билет, содержащий два теоретических вопроса из перечня вопросов, приведённых ниже и экзаменационный билет с одной задачей (уравнение, система уравнений, функционал, текстовая задача для решения методами вариационного исчисления).

Контрольные вопросы для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Решение общее, частное. Первый и общий интеграл дифференциального уравнения.
3. Задача Коши и граничная задача.
4. Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной.
5. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним. Уравнения в полных дифференциалах.
6. Принцип сжатых отображений.

7. Теорема существования и единственности решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

8. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Теорема существования и решения уравнения $F(x, y, y') = 0$.

9. Особые точки, особые решения.

10. Дифференциальные уравнения порядка выше первого. Теорема существования и единственности решения для дифференциального уравнения вида $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$.

11. Сведение уравнений n-го порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений.

12. Формула Остроградского-Лиувилля.

13. Простейшие случаи понижения порядка. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.

14. Теоремы о решениях линейного уравнения n-го порядка.

15. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные).

16. Уравнения Эйлера.

17. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов.

18. Метод малого параметра.

19. Понятие о краевых задачах.

20. Решение краевой задачи методом функции Грина.

21. Построение функции Грина.

1. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия. Интегрирование системы дифференциальных уравнений путём сведения к одному уравнению более высокого порядка.

2. Нахождение интегрируемых комбинаций. Системы линейных дифференциальных уравнений. Теоремы о решениях системы линейных дифференциальных уравнений.

3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

4. Теория устойчивости. Основные понятия. Простейшие типы точек покоя. Второй метод А. М. Ляпунова.

5. Исследование на устойчивость по первому приближению. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена.

6. Случай малого коэффициента при производной высшего порядка.

7. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Теорема Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

8. Уравнения в частных производных первого порядка. Основные понятия.

9. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.

Связь с векторным полем. Характеристики. Теорема об общем решении уравнения в частных производных первого порядка.

10. Вариация и ее свойства. Основная лемма вариационного исчисления. Основная теорема вариационного исчисления.

11. Вариационная задача с неподвижными границами. Уравнение Эйлера.

12. Функционалы вида $\int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right) dx$. Система уравнений Эйлера.

13. Функционалы вида $\int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) dx$. Уравнение Эйлера–Пуассона.

14. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Уравнение Остроградского.

16. Метод вариаций в задачах с подвижными границами. Простейшая задача с подвижными границами.

17. Условия трансверсальности.

18. Задача с подвижными границами для функционалов вида $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$.

Задачи, выносимые на экзамен

Решить уравнения:

1. $2xy' + y^2 = 1.$
2. $(x+y)^2 y' = 1.$
3. $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}.$
4. $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + tg\,\dfrac{y-2x}{x+1}.$
5. $\dfrac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2.$
6. $y' = tg(y-2x).$
7. $y' = \dfrac{y^2 - x}{2y(x+1)}.$
8. $6x^5 y dx + \left(y^4 \ln y - 3x^6\right) dy = 0.$
9. $\left(x^3 - 2xy^2\right) dx + 3x^2 y dy = x dy - y dx.$
10. $y' = y^2 - xy - x.$
11. $y''' + y' = \sin x + x\cos x.$
12. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}.$
13. $4y = x^2 + y'^2.$
14. $y'^4 = 4y(xy' - 2y)^2.$
15. $(xy' - y)^2 = x^2 y^2 - x^4.$
16. $(xy' - y)^2 = y'^2 - \dfrac{2yy'}{x} + 1.$
17. $y = 2xy' - 4y'^3.$
18. $2xy'y'' = y'^2 - 1.$
19. $yy'' + 1 = y'^2.$
20. $y'' = xy' + y + 1.$
21. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{y'^2}{y}.$
22. $x^3 y'' = (y - xy')(y - xy' - x).$
23. $x^2 y'' - 2y = \sin\ln x.$
24. $xy'' + 2y' - xy = 0;\ \ y_1 = \dfrac{e^x}{x}.$
25. $y'' - y' tgx + 2y = 0;\ \ y_1 = \sin x.$

Найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным краевым условиям.

1. $y'' + y = 2x - \pi;\ \ y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0.$
2. $y'' - 2iy = 0;\ \ y(0) = -1,\ \ y(+\infty) = 0.$

3. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0;\ \ y'(1) = 3,\ \ y(x) = O\left(x^{-2}\right)$ при $x \to +\infty.$

Для каждой из краевых задач построить функцию Грина.

1. $x^2y'' + 2xy' = f(x);\ \ y(1) = 0,\ \ y'(3) = 0.$
2. $y'' - y = f(x);\ \ y'(0) = 0,\ \ y'(2) + y(2) = 0.$
3. $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x);\ \ y(0)$ ограничено, $y(1) = 0.$

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases}\dot{x} - 5x - 3y = 0,\\ \dot{y} + 3x + y = 0.\end{cases}$ – методом Эйлера
2. $\begin{cases}\dot{x} = y - 5\cos t,\\ \dot{y} = 2x + y.\end{cases}$ – методом исключения
3. $\begin{cases}\dot{x} = 2x - y,\\ \dot{y} = x.\end{cases}$ – методом Д’аламбера
4. $\dot{x} = Ax,\quad A = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}.$ – матричным методом
5. $\begin{cases}\dot{x} = 2x + y + 2e^t,\\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}.\end{cases}$ – методом неопределённых коэффициентов
6. $\begin{cases}\dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t},\\ \dot{y} = 2x - y.\end{cases}$ – методом вариации постоянных
7. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчиво ли решение уравнения $\dot{x} = t - x$ с начальным условием $x(0) = 1.$

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение в следующих системах:

8. $\begin{cases}\dot{x} = x^2 + y^2 - 2x,\\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y.\end{cases}$
9. $\begin{cases}\dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x,\\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y.\end{cases}$
10. $\begin{cases}\dot{x} = tg(y - x),\\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right).\end{cases}$

Исследовать, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение в следующих системах:

11. $\begin{cases}\dot{x} = ax + y + x^2,\\ \dot{y} = x + ay + y^2.\end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$

Пользуясь теоремой Гурвица об отрицательности действительных частей всех корней многочлена, исследовать устойчивость нулевого решения в следующих задачах:

13. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$

14. $y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0.$

15. $y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$

Решить уравнения

16. $\left(x^2 + y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0.$

17. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (z + u)\dfrac{\partial u}{\partial z} = xy.$

18. $\left(y + 2z^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2x^2 z\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2;\quad x = z,\ y = x^2.$

Найти экстремали функционалов:

19. $J[y(x)] = \int\limits_0^1 \left(y^2 + y'^2\right)dx;\quad y(0) = 0,\ y(1) = 1.$

20. $J[y(x)] = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 (y'')^2\,dx$ при условиях $y(0) = 0,\ y(1) = \dfrac{1}{2},\ y'(0) = 0,\ y'(1) = 1.$

21. $J[y(x), z(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} \left(y'^2 + z'^2 - 2yz\right)dx;\quad y(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ z(0) = 0,\ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

Типовые экзаменационные билеты имеют следующий вид.

Томский государственный университет
Факультет прикладной математики и кибернетики
Кафедра исследования операций

Дифференциальные уравнения

<u>Экзаменационный билет № 1</u>

1. Принцип сжатых отображений.

2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней характеристического уравнения.

Зав. кафедрой, д.т.н., профессор _____________ */А.М. Горцев/*

Томский государственный университет
Факультет прикладной математики и кибернетики
Кафедра исследования операций

Дифференциальные уравнения

<u>Экзаменационный билет № 1</u>

1. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.
2. Вариация и её свойства.

Зав. кафедрой, д.т.н., профессор _____________ */А.М. Горцев/*

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов обучения

4.1. Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

За контрольную работу ставится «зачёт», если решены все задания предложенного варианта.

4.2. Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Критерии формирования оценок при проведении зачёта

«Зачёт» ставится в том случае, если обучающийся ответил не менее, чем на два вопроса из предложенного выше списка.

Критерии формирования оценок при проведении экзамена

Оценки при проведении экзамена формируются в соответствии с нижеприведенной таблицей.

неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	отлично
Не ответил ни на	Ответил на один из	Ответил на оба	Ответил на оба

один из двух вопросов билета и не решил задачу. Ответил на один из двух вопросов билета и не решил задачу.	двух вопросов билета и решил задачу.	вопроса и не полностью решил задачу.	вопроса и полностью решил задачу.