

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО:  
Декан  
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

**Дифференциальная геометрия и топология**

по направлению подготовки

**03.04.02 Физика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**Фундаментальная и прикладная физика**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Магистр**

Год приема  
**2025**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
О.Н. Чайковская

Председатель УМК  
О.М. Сюсина

Томск – 2025

## **1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ПК-1 Способен самостоятельно ставить конкретные задачи научных исследований в области физики и решать их с помощью современной аппаратуры и информационных технологий с использованием новейшего российского и зарубежного опыта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИПК-1.1 Знает основные стратегии исследований в выбранной области физики, критерии эффективности, ограничения применимости

ИПК-1.2 Умеет выделять и систематизировать основные цели исследований в выбранной области физики, извлекать информацию из различных источников, включая периодическую печать и электронные коммуникации, представлять её в понятном виде и эффективно использовать

ИПК-1.3 Владеет навыками аналитической переработки информации, проведения исследований с помощью современной аппаратуры и информационных технологий, обобщения и представления результатов, полученных в процессе решения задач исследования

## **2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания**

Элементы текущего контроля: коллоквиум (ПК 1, ИПК-1.1, ИПК-1.2, ИПК-1.3).

По дисциплине «Дифференциальная геометрия» предусмотрен один коллоквиум на 11-ой неделе 3-го семестра. Коллоквиум проводится в устной форме по билетам. Каждый билет состоит из двух теоретических вопросов и двух задач из открытого банка задач.

### **Перечень теоретических вопросов, выносимых на коллоквиум (ПК-1, ИПК 1.1)..**

1. Отображение множеств. Образ и прообраз множества при отображении. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Композиция отображений. Тожественное отображение. Определение и критерий существования обратного отображения. Сужение отображения на подмножество.

2. Открытые подмножества в  $R^n$  и  $C^n$ . Класс гладкости отображения. Якобиан отображения, цепное правило для якобианов. Гомеоморфизмы и диффеоморфизмы областей в  $R^n$  и  $C^n$ . Бигоморфизмы. Теорема об обратном отображении (без доказательства). Критерий диффеоморфизма областей в  $R^n$ .

3. Карта на множестве. Носитель карты, картирующее отображение, локальные координаты. Отображения и функции перехода. Согласованные карты. Атлас на множестве. Максимальный атлас. Теорема о максимальном атласе (без доказательства). Эквивалентные атласы. Гладкая структура. Определение топологического, гладкого и комплексного многообразия. Класс гладкости многообразия. Размерность многообразия.

4. Стандартная гладкость на  $R^n$ . Элементарные многообразия. Гладкость на множестве матриц данного размера. Гладкость на общей линейной группе. Пример нестандартной гладкости на  $R^1$ .

5. Гладкая структура на окружности. Сферы  $S^n$ . Стереографические проекции  $n$ -мерной сферы.  $S^2$  как комплексное многообразие. Вещественное и комплексное проективные пространства. Гладкость на  $RP^n$  и  $CP^n$ . Диффеоморфизмы  $RP^1$  и  $S^1$  и  $CP^1$  и  $S^2$ .

6. Гладкие поверхности как многообразия. Прямое произведение многообразий.

7. Топология многообразия, индуцированная гладкостью. Критерий открытого множества многообразия. Открытые множества многообразия, покрываемые одной картой. Открытость носителей карт многообразия.

8. Топологическое пространство. Тривиальная топология. Дискретная топология. Окрестность точки. Критерий открытого множества. База топологии. Критерий базы. База

окрестностей точки топологического пространства. Критерий базы окрестностей точки. Сравнение топологий.

9. Естественная топология в  $R^n$ . Базы и базы окрестностей точек естественной топологии. Определение и примеры метрических пространств. Доказательство неравенства треугольника и неравенства Коши — Буняковского в  $R^n$ . Примеры метрик в  $R^n$  и в функциональных пространствах. Топология метрического пространства, индуцированная метрикой.

10. Замкнутые подмножества топологического пространства. Свойства замкнутых подмножеств. Замыкание множества. Критерий принадлежности точки замыканию множества. Внутренность множества. Граница множества.

11. Непрерывное отображение топологических пространств. Непрерывность отображения в точке. Критерии непрерывного отображения. Критерий непрерывности отображения метрических пространств. Непрерывность композиции непрерывных отображений. Открытые и замкнутые отображения. Примеры открытого не непрерывного и непрерывного не открытого отображений. Гомеоморфизм топологических пространств. Гомеоморфные топологические пространства. Открытость и замкнутость гомеоморфизмов.

12. Локально евклидовы топологические пространства. Совпадение категорий локально евклидовых топологических пространств и топологических многообразий. Теоремы существования гладких структур (без доказательства). Альтернативное определение многообразия.

13. Определение гладкого отображения многообразий. Гладкость композиции гладких отображений. Гладкость тождественного отображения. Диффеоморфизм. Диффеоморфные многообразия. Матрица Якоби и ранг отображения. Независимость ранга отображения от выбора карты. Локально плоское отображение. Теорема о локально плоском отображении.

14. Непрерывная функция на топологическом пространстве. Гладкая функция на многообразии. Алгебры непрерывных и гладких функций. Кривая в топологическом пространстве. Гладкая кривая в многообразии. Носитель кривой. Кривые с замкнутым интервалом параметра. Начало кривой, конец кривой. Замкнутая кривая. Гладкая замкнутая кривая.

15. Касательный вектор в точке многообразия. Касательное пространство. Голономный базис в касательном пространстве. Интерпретация касательного вектора к гладкой поверхности. Примеры: сфера и специальная линейная группа.

16. Касательное расслоение. Гладкая структура на касательном расслоении. Каноническая проекция. Механическая интерпретация касательного расслоения. 18. Векторное поле. Локальное представление векторного поля в карте. Векторные поля как дифференцирования. Коммутатор векторных полей. Алгебра Ли векторных полей. Совпадение алгебры Ли векторных полей с алгеброй дифференцирований функций на многообразии (доказательство для  $R^n$ ). Умножение векторного поля на функцию.

17. Определение алгебры. Коммутативные, ассоциативные и унитарные алгебры. Размерность алгебры. Алгебры Ли. Примеры алгебр. Построение алгебры Ли из ассоциативной алгебры. Дифференцирование алгебры. Алгебра Ли дифференцирований произвольной алгебры.

18. Дифференциал гладкого отображения в точке. Матрица дифференциала. Дифференциал как отображение касательных расслоений. Представление дифференциала в локальных координатах. Доказательство формулы  $((d\varphi)V)f \cdot \varphi = V(f \cdot \varphi) \cdot \varphi$  -связанные векторные поля. Алгебра Ли  $\varphi$ -связанных векторных полей. Инвариантное определение векторного поля как дифференцирования через дифференциал гладкой функции.

19. Подпространства топологического пространства. Наследственная топология. Непрерывность сужения непрерывного отображения на подпространство. Погруженные и вложенные подмногообразия. Локальные координаты, согласованные с

подмногообразием. Касательное пространство к подмногообразию. Алгебра Ли векторных полей, касающихся подмногообразия.

20. Интегральные кривые векторного поля. Дифференциальное уравнение интегральной кривой. Максимальные интегральные кривые. Полные векторные поля. Теорема существования и единственности максимальной интегральной кривой векторного поля. Особые точки векторного поля. Теорема о выпрямляемости траекторий векторного поля. Выпрямляющие координаты. Перепараметризация интегральных кривых.

21. Поля подпространств. Распределения. Интегральные многообразия распределений. Слоения. Листы слоения. Примеры вполне интегрируемых и неинтегрируемых распределений.

22. Инволютивные распределения. Критерий полной интегрируемости распределения. Теорема Фробениуса. Трансверсальное сечение слоения. Существование локальных трансверсальных сечений. Факторизуемое слоение. Фактормногообразие слоения.

### Открытый банк задач для коллоквиума (ИПК 1.2, ИПК-1.3)

1. Докажите, что отображение  $\varphi$  плоского кольца  $1 < x^2 + y^2 < 2$  на кольцо  $1 < x^2 + y^2 < 4$ , заданное формулой  $\varphi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  имеет якобиан, всюду отличный от нуля, но не биективно.

2. Доказать, что картами стандартной гладкости на  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ) являются пары вида  $(U, h)$ , где  $U$  — открытые множества в  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ), а  $h$  — произвольные диффеоморфизмы множеств  $U$  на открытые множества  $h(U) \subset \mathbb{R}^n$  (соответственно,  $h(U) \subset \mathbb{C}^n$ ).

3. Покажите, что четыре карты на  $\mathbb{S}^1$

$$(U^{(+)}, h^{(+)} ) = (\{p = (x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid y > 0\}, h^{(+)}(p) = x),$$

$$(U^{(-)}, h^{(-)} ) = (\{p = (x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid y < 0\}, h^{(-)}(p) = x),$$

$$(V^{(+)}, k^{(+)} ) = (\{p = (x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid x > 0\}, k^{(+)}(p) = y),$$

$$(V^{(-)}, k^{(-)} ) = (\{p = (x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid x < 0\}, k^{(-)}(p) = y),$$

носители которых состоят из дуг полуокружностей, а картирующие отображения совпадают с проектированиями на координатные оси, образуют атлас, эквивалентный атласу построенному с помощью двух стереографических проекций.

4. Докажите, что якобиан перехода между картами атласа на гладкой поверхности, заданной системой уравнений, построенный в лекциях, отличен от нуля.

5. Установите диффеоморфизм  $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ .

6. Проверить согласованность карт атласа на многообразии Грассмана, построенного в лекциях.

7. Докажите, что:

1) для любого подмножества  $W$  замыкание  $\overline{W}$  есть пересечение всех замкнутых подмножеств содержащих  $W$ .

2) множество  $W$  замкнуто тогда, и только тогда, когда  $W = \overline{W}$ .

3) для любого подмножества  $W$  имеем  $\overline{\overline{W}} = \overline{W}$ .

4) для любых подмножеств  $W_i \subset X, i = 1, \dots, n$  имеем  $\overline{W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n} = \overline{W_1} \cup \overline{W_2} \cup \dots \cup \overline{W_n}$ .

5) если  $W_1 \subset W_2$ , то  $\overline{W_1} \subset \overline{W_2}$ .

8. Докажите, что:

1)  $\overline{W} = W \cup W' = W \cup \partial W$ ;

2)  $W$  открыто  $\Leftrightarrow W = \text{Int}W \Leftrightarrow W \cap \partial W = \emptyset$ ;

$$3) \partial W = \overline{W} \cap (X \setminus W);$$

$$4) \text{Int} W = W \setminus \partial W;$$

$$5) W \text{ замкнуто} \Leftrightarrow \partial W \subset W.$$

9. Доказать, что для отображения  $f: X \rightarrow Y$  метрического пространства  $(X, \rho_1)$  в метрическое пространство  $(Y, \rho_2)$

$$f: X \rightarrow Y \text{ непрерывно} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

10. Пусть  $X, Y$  — произвольные топологические пространства. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны: 1)  $f$  непрерывно; 2) для каждого множества  $W \subset X: f(\overline{W}) \subset \overline{f(W)}$ ; 3) для каждого множества  $Z \subset Y: \overline{f^{-1}(Z)} \subset f^{-1}(\overline{Z})$ .

11. Докажите, что интервал  $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$  гомеоморфен  $\mathbb{R}^1$ .

12. Докажите, что открытый шар  $B(x_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$  гомеоморфен  $\mathbb{R}^n$ .

13. Докажите, что диффеоморфные многообразия имеют одинаковую размерность.

14. Докажите, что условие регулярности функции Лагранжа не зависит от выбора обобщенных координат.

15. Проверить, что коммутатор векторных полей является векторным полем, то есть проверьте, что на пересечении карт

$$[V, W]^i \left( \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right) = [V, W]^j.$$

16. Докажите, что отображение  $f: N \rightarrow M$  тогда и только тогда является локальным диффеоморфизмом в точке  $p$ , когда его дифференциал в этой точке,  $(df)_p: T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$ , является изоморфизмом.

17. Пусть  $Y$  — подпространство топологического пространства  $X$ . Приведите пример, когда открытое (замкнутое) множество в  $Y$  не открыто (соответственно, не замкнуто) в  $X$ .

18. Докажите, что замыкание в  $Y$  всякого множества  $M \subset Y$  является пересечением с подпространством  $Y \subset X$  замыкания множества  $M$  в  $X$ .

19. Пусть  $X$  — топологическое пространство и  $Y \subset X$  — подмножество в  $X$ . Докажите, что наследственная топология является слабейшей среди всевозможных топологий на  $Y$ , для которой отображение вложения  $i: Y \rightarrow X$  непрерывно.

20. Докажите, что линейная комбинация и коммутатор векторных полей, касающихся подмногообразия, также касается подмногообразия, опираясь на явное выражение для таких векторных полей в локальных координатах, согласованных с подмногообразием.

21. Вычислить попарные коммутаторы векторных полей

$$X_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1},$$

заданных в  $\mathbb{R}^3$ .

22. Покажите, что если для двух распределений  $p \rightarrow E_p^1$  и  $p \rightarrow E_p^2$  на  $M$  размерность подпространств  $E_p^1 \cap E_p^2$  постоянна, т.е. не зависит от точки  $p$ , то поля подпространств  $p \rightarrow E_p^1 \cap E_p^2$  и  $p \rightarrow E_p^1 + E_p^2$  являются распределениями.

23. Найдите интегральные кривые векторных полей  $X = e^x \frac{\partial}{\partial x}$  и  $X = (1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x}$  на прямой. Докажите, что эти векторные поля неполные.

24. Нарисовать линии уровня каких нибудь выпрямляющих координат для следующих векторных полей на плоской области  $U \subset \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} 1) X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}, \quad U = \{x, y \mid x > 0\}, \quad 2) X = \frac{\partial}{\partial x} + \sin x \frac{\partial}{\partial y}, \quad U = \mathbb{R}^2, \\ 3) X = x \frac{\partial}{\partial x} + (1-x^2) \frac{\partial}{\partial y}, \quad U = \{x, y \mid -1 < x < 1\}. \end{aligned}$$

25. Пусть  $X$  — гладкое векторное поле в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с евклидовой метрикой. Поле  $X$  называется *полем нормалей*, если через каждую точку  $\mathbb{R}^3$  проходит некоторая поверхность  $\Sigma$ , в каждой точке  $p \in \Sigma$  которой вектор  $X_p$  (анти)коллинеарен вектору нормали к поверхности. Доказать, что необходимое и достаточное условие, чтобы векторное поле  $X \in Vect(\mathbb{R}^3)$  было полем нормалей, имеет вид  $(X, \text{rot } X) = 0$ .

Критерии оценивания:

Результаты коллоквиума определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется при правильном ответе студентом на оба теоретических вопроса и решении не задач экзаменационного билета. При ответе на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня теоретических вопросов коллоквиума и открытого перечня задач студент дает не менее 80% правильных ответов, демонстрирует понимание взаимосвязей между различными понятиями, свободно владеет терминологией.

Оценка «хорошо» выставляется при правильном ответе студентом не менее чем на один теоретический вопрос и решении двух задач экзаменационного билета. При ответе на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов и открытого перечня задач студент дает не менее 60% правильных ответов, демонстрирует понимание большинства пройденных тем, свободно владеет терминологией.

Оценка «удовлетворительно» выставляется при правильном ответе студентом не менее чем на один теоретический вопрос, решении не менее одной задачи экзаменационного билета. При ответе на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов и открытого перечня задач студент дает не менее 50% правильных ответов, демонстрирует понимание большинства пройденных тем, владеет терминологией.

Если ответ студента не удовлетворяет критериям оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», то выставляется оценка «неудовлетворительно».

### 3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

**Зачет с оценкой в третьем семестре** проводится в устной форме по билетам. Билет содержит два теоретических вопроса и три задачи. После ответа на билет студенту отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов и открытого перечня задач, направленные на проверку достижения ПК-1, ИПК-1.1, ИПК-1.2 и ИПК-1.3.

Примерный перечень теоретических вопросов

Вопрос 1. Касательное расслоение. Гладкая структура на касательном расслоении.

Каноническая проекция. Механическая интерпретация касательного расслоения.

Вопрос 2. Компактные топологические пространства. Критерии компактности. Непрерывное отображение компактного пространства. Факторпространство компактного пространства. Компактность замкнутых и замкнутость компактных множеств компактного пространства. Критерий компактного множества в  $\mathbb{R}^n$ .

Примеры задач:

Задача 1. Докажите, что:

- 1) для любого подмножества  $W$  замыкание  $\overline{W}$  есть пересечение всех замкнутых подмножеств содержащих  $W$ .
- 2) множество  $W$  замкнуто тогда, и только тогда, когда  $W = \overline{W}$ .
- 3) для любого подмножества  $W$  имеем  $\overline{\overline{W}} = \overline{W}$ .
- 4) для любых подмножеств  $W_i \subset X, i=1, \dots, n$  имеем  $\overline{W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n} = \overline{W_1} \cup \overline{W_2} \cup \dots \cup \overline{W_n}$ .
- 5) если  $W_1 \subset W_2$ , то  $\overline{W_1} \subset \overline{W_2}$ .

Задача 2. Найдите интегральные кривые векторных полей  $X = e^x \frac{\partial}{\partial x}$  и

$X = (1+x^2) \frac{\partial}{\partial x}$  на прямой. Докажите, что эти векторные поля неполные.

Задача 3. Билинейная форма  $(,)$  на конечномерном линейном пространстве  $V$  определяет изоморфизм  $\varphi: V \rightarrow V^*$ . Найти явное выражение для  $\varphi$  во взаимно дуальных базисах пространств  $V$  и  $V^*$  через матрицу  $J = (J_{ab})$  билинейной формы в базисе  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ .

### Открытый перечень теоретических вопросов, выносимых на зачет с оценкой (ПК-1, ИПК-1.1)

1. Отображение множеств. Образ и прообраз множества при отображении. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Композиция отображений. Тожественное отображение. Определение и критерий существования обратного отображения. Сужение отображения на подмножество.

2. Открытые подмножества в  $R^n$  и  $C^n$ . Класс гладкости отображения. Якобиан отображения, цепное правило для якобианов. Гомеоморфизмы и диффеоморфизмы областей в  $R^n$  и  $C^n$ . Биголоморфизмы. Теорема об обратном отображении (без доказательства). Критерий диффеоморфизма областей в  $R^n$ .

3. Карта на множестве. Носитель карты, картирующее отображение, локальные координаты. Отображения и функции перехода. Согласованные карты. Атлас на множестве. Максимальный атлас. Теорема о максимальном атласе (без доказательства). Эквивалентные атласы. Гладкая структура. Определение топологического, гладкого и комплексного многообразия. Класс гладкости многообразия. Размерность многообразия.

4. Стандартная гладкость на  $R^n$ . Элементарные многообразия. Гладкость на множестве матриц данного размера. Гладкость на общей линейной группе. Пример нестандартной гладкости на  $R^1$ .

5. Гладкая структура на окружности. Сферы  $S^n$ . Стереографические проекции  $n$ -мерной сферы.  $S^2$  как комплексное многообразие. Вещественное и комплексное проективные пространства. Гладкость на  $RP^n$  и  $CP^n$ . Диффеоморфизмы  $RP^1$  и  $S^1$  и  $CP^1$  и  $S^2$ .

6. Гладкие поверхности как многообразия. Прямое произведение многообразий.

7. Топология многообразия, индуцированная гладкостью. Критерий открытого множества многообразия. Открытые множества многообразия, покрываемые одной картой. Открытость носителей карт многообразия.

8. Топологическое пространство. Тривиальная топология. Дискретная топология. Окрестность точки. Критерий открытого множества. База топологии. Критерий базы. База окрестностей точки топологического пространства. Критерий базы окрестностей точки. Сравнение топологий.

9. Естественная топология в  $R^n$ . Базы и базы окрестностей точек естественной топологии. Определение и примеры метрических пространств. Доказательство неравенства треугольника и неравенства Коши — Буняковского в  $R^n$ . Примеры метрик в  $R^n$  и в функциональных пространствах. Топология метрического пространства, индуцированная метрикой.

10. Замкнутые подмножества топологического пространства. Свойства замкнутых подмножеств. Замыкание множества. Критерий принадлежности точки замыканию множества. Внутренность множества. Граница множества.

11. Непрерывное отображение топологических пространств. Непрерывность отображения в точке. Критерии непрерывного отображения. Критерий непрерывности отображения метрических пространств. Непрерывность композиции непрерывных отображений. Открытые и замкнутые отображения. Примеры открытого не непрерывного и непрерывного не открытого отображений. Гомеоморфизм топологических пространств. Гомеоморфные топологические пространства. Открытость и замкнутость гомеоморфизмов.

12. Локально евклидовы топологические пространства. Совпадение категорий локально евклидовых топологических пространств и топологических многообразий. Теоремы существования гладких структур (без доказательства). Альтернативное определение многообразия.

13. Определение гладкого отображения многообразий. Гладкость композиции гладких отображений. Гладкость тождественного отображения. Диффеоморфизм. Диффеоморфные многообразия. Матрица Якоби и ранг отображения. Независимость ранга отображения от выбора карты. Локально плоское отображение. Теорема о локально плоском отображении.

14. Непрерывная функция на топологическом пространстве. Гладкая функция на многообразии. Алгебры непрерывных и гладких функций. Кривая в топологическом пространстве. Гладкая кривая в многообразии. Носитель кривой. Кривые с замкнутым интервалом параметра. Начало кривой, конец кривой. Замкнутая кривая. Гладкая замкнутая кривая.

15. Касательный вектор в точке многообразия. Касательное пространство. Голономный базис в касательном пространстве. Интерпретация касательного вектора к гладкой поверхности. Примеры: сфера и специальная линейная группа.

16. Касательное расслоение. Гладкая структура на касательном расслоении. Каноническая проекция. Механическая интерпретация касательного расслоения. 18. Векторное поле. Локальное представление векторного поля в карте. Векторные поля как дифференцирования. Коммутатор векторных полей. Алгебра Ли векторных полей. Совпадение алгебры Ли векторных полей с алгеброй дифференцирований функций на многообразии (доказательство для  $R^n$ ). Умножение векторного поля на функцию.

17. Определение алгебры. Коммутативные, ассоциативные и унитарные алгебры. Размерность алгебры. Алгебры Ли. Примеры алгебр. Построение алгебры Ли из ассоциативной алгебры. Дифференцирование алгебры. Алгебра Ли дифференцирований произвольной алгебры.

18. Дифференциал гладкого отображения в точке. Матрица дифференциала. Дифференциал как отображение касательных расслоений. Представление дифференциала в локальных координатах. Доказательство формулы  $((d\varphi)V)f \cdot \varphi = V(f \cdot \varphi) \cdot \varphi$  -связанные векторные поля. Алгебра Ли  $\varphi$ -связанных векторных полей. Инвариантное определение векторного поля как дифференцирования через дифференциал гладкой функции.

19. Подпространства топологического пространства. Наследственная топология. Непрерывность сужения непрерывного отображения на подпространство. Погруженные и вложенные подмногообразия. Локальные координаты, согласованные с подмногообразием. Касательное пространство к подмногообразию. Алгебра Ли векторных полей, касающихся подмногообразия.



20. Интегральные кривые векторного поля. Дифференциальное уравнение интегральной кривой. Максимальные интегральные кривые. Полные векторные поля. Теорема существования и единственности максимальной интегральной кривой векторного поля. Особые точки векторного поля. Теорема о выпрямляемости траекторий векторного поля. Выпрямляющие координаты. Перепараметризация интегральных кривых.

21. Поля подпространств. Распределения. Интегральные многообразия распределений. Слоения. Листы слоения. Примеры вполне интегрируемых и неинтегрируемых распределений.

22. Инволютивные распределения. Критерий полной интегрируемости распределения. Теорема Фробениуса. Трансверсальное сечение слоения. Существование локальных трансверсальных сечений. Факторизуемое слоение. Фактормногообразие слоения.

23. Отношение эквивалентности. Фактормножество. Каноническая проекция. Факторпространство линейного пространства по подпространству. Фактортопология. Характеристика фактортопологии с помощью канонической проекции.

24. Аксиома Хаусдорфа. Отделимость топологии, согласованной с метрикой. Нехаусдорфова прямая. Единственность предела последовательности и замкнутость точек в хаусдорфовом пространстве. Замкнутость подмножеств, определенных системой уравнений. Хаусдорфовость и замкнутость диагонали квадрата.

25. Связные, линейно связные и локально линейно связные пространства. Сохранение (линейной) связности при непрерывном отображении. (Линейная) связность объединения множеств, имеющих общую точку. Компоненты линейной связности, их открытость и замкнутость. Эквивалентность связности и линейной связности. Локальная линейная связность многообразий. Примеры связных и несвязных пространств.

26. Первая и вторая аксиомы счетности, их взаимоотношение. Критерий непрерывности отображения в точке в терминах последовательностей. Покрывание топологического пространства. Теорема Линделефа.

27. Лемма Бореля — Лебега (без доказательства). Компактные топологические пространства. Критерии компактности. Непрерывное отображение компактного пространства. Факторпространство компактного пространства. Компактность замкнутых и замкнутость компактных множеств компактного пространства. Критерий компактного множества в  $\mathbb{R}^n$ .

28. Примеры компактных пространств:  $S^n, T^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ . Примеры некомпактных пространств. Существование предельной точки бесконечного множества в компактном пространстве. Теорема Вейерштрасса. Носитель функции. Локально компактные топологические пространства. Примеры. Локальная компактность многообразий.

29. Теорема Уитни (без доказательства). Невложимость компактных комплексных многообразий в  $\mathbb{C}^n$ . Понятие проективно-алгебраического многообразия. Многообразие Грассмана как проективно-алгебраическое многообразие.

30. Прямая сумма линейных подпространств. Размерность прямой суммы линейных подпространств. Примеры. Дополнительное подпространство. Существование дополнительного подпространства. Прямая сумма линейных пространств. Прямая сумма линейных операторов. Матрица прямой суммы линейных операторов.

31. Линейный функционал. Сопряженное пространство. Дуальный базис сопряженного пространства. Транспонированный оператор. Матрица транспонированного оператора. Невырожденная билинейная форма на конечномерном пространстве как изоморфизм.

32. Полулинейный функционал. Комплексно-сопряженное пространство. Дуальный базис комплексно-сопряженного пространства. Сопряженный оператор. Матрица сопряженного оператора. Невырожденная полуторалинейная форма на конечномерном пространстве как изоморфизм.

33. Тензорное произведение линейных пространств. Размерность тензорного произведения. Тензорное произведение линейных операторов и матриц. Матрица тензорного произведения линейных операторов.

34. Тензор на вещественном линейном пространстве. Тип тензора. Тензоры типа  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$ , . Базис в пространстве тензоров. Компоненты тензора. Тензорный закон преобразования компонент тензора при замене базиса. Тензоры на комплексном линейном пространстве.

35. Умножение тензоров. Свертка тензора. Тензоры как полилинейные функционалы. Примеры. Подъем и опускание индексов тензора.

36. Подстановка индексов тензора. Симметрические и кососимметрические тензоры. Примеры. (Частичная) симметризация и альтернирование тензора. Критерий (косо)симметрического тензора. Альтернирование (симметризация) частично альтернированного (соответственно, симметризованного) тензора.

37.  $q$ -формы на линейном пространстве. Внешнее умножение  $q$ -форм. Свойства внешнего умножения. Внешняя алгебра. Подалгебра форм четной степени. Критерий линейной независимости ковекторов. Базис, размерность внешней алгебры. Разложимые  $q$ -формы.

38. Определение векторного расслоения. Тотальное пространство, база, проекция, тривиализирующая окрестность, ранг расслоения. Сечение векторного расслоения. Сложение сечений и умножение сечений на функции. Тривиальное векторное расслоение. Тривиализирующий базис. Морфизмы векторных расслоений. Эквивалентные расслоения.

39. Функции склейки векторного расслоения. Определение векторного расслоения по функциям склейки.

40. Тавтологическое векторное расслоение над проективным пространством.

41. Сумма Уитни векторных расслоений. Тензорное произведение векторных расслоений. Дуальное расслоение. Сечения дуального расслоения как  $(\ )^* F(M)$ -линейные функционалы на сечениях расслоения.

42. Касательное и кокасательное расслоения к многообразию: тривиализирующие окрестности, тривиализирующие базисы, функции склейки, сечения. Линейные дифференциальные формы как  $\wedge^k$ -линейные функционалы на векторных полях. Дифференциал гладкой функции как линейная дифференциальная форма.

43. Тензорная алгебра векторного расслоения. Операции в тензорной алгебре. Кси-тензорные поля как  $F(M)$ -полилинейные функционалы. Тензорная алгебра над многообразием.

44. Симметризация и альтернирование кси-тензорных полей. Внешняя алгебра векторного расслоения. Дифференциальные формы.

### **Открытый перечень задач, выносимых на зачет с оценкой (ИПК-1.2, ИПК-1.3)**

1. Докажите, что отображение  $\varphi$  плоского кольца  $1 < x^2 + y^2 < 2$  на кольцо  $1 < x^2 + y^2 < 4$ , заданное формулой  $\varphi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  имеет якобиан, всюду отличный от нуля, но не биективно.

2. Доказать, что картами стандартной гладкости на  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ) являются пары вида  $(U, h)$ , где  $U$  — открытые множества в  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ), а  $h$  — произвольные диффеоморфизмы множеств  $U$  на открытые множества  $h(U) \subset \mathbb{R}^n$  (соответственно,  $h(U) \subset \mathbb{C}^n$ ).

3. Покажите, что четыре карты на  $S^1$

$$(U^{(+)}, h^{(+)} ) = (\{p = (x, y) \in S^1 \mid y > 0\}, h^{(+)}(p) = x),$$

$$(U^{(-)}, h^{(-)} ) = (\{p = (x, y) \in S^1 \mid y < 0\}, h^{(-)}(p) = x),$$

$$(V^{(+)}, k^{(+)} ) = (\{p = (x, y) \in S^1 \mid x > 0\}, k^{(+)}(p) = y),$$

$$(V^{(-)}, k^{(-)} ) = (\{p = (x, y) \in S^1 \mid x < 0\}, k^{(-)}(p) = y),$$

носители которых состоят из дуг полуокружностей, а картирующие отображения совпадают с проектированиями на координатные оси, образуют атлас, эквивалентный атласу построенному с помощью двух стереографических проекций.

4. Докажите, что якобиан перехода между картами атласа на гладкой поверхности, заданной системой уравнений, построенный в лекциях, отличен от нуля.

5. Установите диффеоморфизм  $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ .

6. Проверить согласованность карт атласа на многообразии Грассмана, построенного в лекциях.

7. Докажите, что:

1) для любого подмножества  $W$  замыкание  $\overline{W}$  есть пересечение всех замкнутых подмножеств содержащих  $W$ .

2) множество  $W$  замкнуто тогда, и только тогда, когда  $W = \overline{W}$ .

3) для любого подмножества  $W$  имеем  $\overline{\overline{W}} = \overline{W}$ .

4) для любых подмножеств  $W_i \subset X, i=1, \dots, n$  имеем  $\overline{W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n} = \overline{W_1} \cup \overline{W_2} \cup \dots \cup \overline{W_n}$ .

5) если  $W_1 \subset W_2$ , то  $\overline{W_1} \subset \overline{W_2}$ .

8. Докажите, что:

1)  $\overline{W} = W \cup W' = W \cup \partial W$ ;

2)  $W$  открыто  $\Leftrightarrow W = \text{Int}W \Leftrightarrow W \cap \partial W = \emptyset$ ;

3)  $\partial W = \overline{W} \cap (X \setminus W)$ ;

4)  $\text{Int}W = W \setminus \partial W$ ;

5)  $W$  замкнуто  $\Leftrightarrow \partial W \subset W$ .

9. Доказать, что для отображения  $f: X \rightarrow Y$  метрического пространства  $(X, \rho_1)$  в метрическое пространство  $(Y, \rho_2)$

$$f: X \rightarrow Y \text{ непрерывно} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

10. Пусть  $X, Y$  — произвольные топологические пространства. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны: 1)  $f$  непрерывно; 2) для каждого множества  $W \subset X: f(\overline{W}) \subset \overline{f(W)}$ ; 3) для каждого множества  $Z \subset Y: f^{-1}(\overline{Z}) \subset \overline{f^{-1}(Z)}$ .

11. Докажите, что интервал  $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$  гомеоморфен  $\mathbb{R}^1$ .

12. Докажите, что открытый шар  $B(x_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$  гомеоморфен  $\mathbb{R}^n$ .

13. Докажите, что диффеоморфные многообразия имеют одинаковую размерность.

14. Докажите, что условие регулярности функции Лагранжа не зависит от выбора обобщенных координат.

15. Проверить, что коммутатор векторных полей является векторным полем, то есть проверьте, что на пересечении карт

$$[V, W]^i \left( \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right) = [V, W]^j.$$

16. Докажите, что отображение  $f: N \rightarrow M$  тогда и только тогда является локальным диффеоморфизмом в точке  $p$ , когда его дифференциал в этой точке,  $(df)_p: T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$ , является изоморфизмом.

17. Пусть  $Y$  — подпространство топологического пространства  $X$ . Приведите пример, когда открытое (замкнутое) множество в  $Y$  не открыто (соответственно, не замкнуто) в  $X$ .

18. Докажите, что замыкание в  $Y$  всякого множества  $M \subset Y$  является пересечением с подпространством  $Y \subset X$  замыкания множества  $M$  в  $X$ .

19. Пусть  $X$  — топологическое пространство и  $Y \subset X$  — подмножество в  $X$ . Докажите, что наследственная топология является слабой среди всевозможных топологий на  $Y$ , для которой отображение вложения  $i: Y \rightarrow X$  непрерывно.

20. Докажите, что линейная комбинация и коммутатор векторных полей, касающихся подмногообразия, также касается подмногообразия, опираясь на явное выражение для таких векторных полей в локальных координатах, согласованных с подмногообразием.

21. Вычислить попарные коммутаторы векторных полей

$$X_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1},$$

заданных в  $\mathbb{R}^3$ .

22. Покажите, что если для двух распределений  $p \rightarrow E_p^1$  и  $p \rightarrow E_p^2$  на  $M$  размерность подпространств  $E_p^1 \cap E_p^2$  постоянна, т.е. не зависит от точки  $p$ , то поля подпространств  $p \rightarrow E_p^1 \cap E_p^2$  и  $p \rightarrow E_p^1 + E_p^2$  являются распределениями.

23. Найдите интегральные кривые векторных полей  $X = e^x \frac{\partial}{\partial x}$  и  $X = (1+x^2) \frac{\partial}{\partial x}$  на прямой. Докажите, что эти векторные поля неполные.

24. Нарисовать линии уровня какихнибудь выпрямляющих координат для следующих векторных полей на плоской области  $U \subset \mathbb{R}^2$ :

$$1) X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}, \quad U = \{x, y \mid x > 0\}, \quad 2) X = \frac{\partial}{\partial x} + \sin x \frac{\partial}{\partial y}, \quad U = \mathbb{R}^2,$$

$$3) X = x \frac{\partial}{\partial x} + (1-x^2) \frac{\partial}{\partial y}, \quad U = \{x, y \mid -1 < x < 1\}.$$

25. Пусть  $X$  — гладкое векторное поле в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с евклидовой метрикой. Поле  $X$  называется *полем нормалей*, если через каждую точку  $\mathbb{R}^3$  проходит некоторая поверхность  $\Sigma$ , в каждой точке  $p \in \Sigma$  которой вектор  $X_p$  (анти)коллинеарен вектору нормали к поверхности. Доказать, что необходимое и достаточное условие, чтобы векторное поле  $X \in Vect(\mathbb{R}^3)$  было полем нормалей, имеет вид  $(X, \text{rot } X) = 0$ .

26. Построить реализацию вещественных грассмановых многообразий как фактормножеств множества  $Mat(k, n; k, \mathbb{R})$  по некоторому отношению эквивалентности.

27. Проверить, что для фактортопологии выполнены аксиомы топологии.

28. Докажите, что подпространство хаусдорфова топологического пространства является хаусдорфовым.

29. Реализуйте нехаусдорфову прямую с особой точкой бесконечной кратности как фактормногообразие некоторого слоения.

30. Проверить выполнение аксиом базы для топологии прямого произведения пространств.

31. Докажите, что диагональ квадрата топологического пространства  $X$  гомеоморфна  $X$ .

32. Докажите, что прямое произведение хаусдорфовых топологических пространств хаусдорфово.

33. Докажите, что топологическое пространство  $X$  тогда и только тогда линейно связно, когда любая точка  $x \in X$  может быть соединена кривой с некоторой фиксированной точкой  $x_0 \in X$ .

34. Докажите, что сферы  $\mathbb{S}^n$  линейно связны.

35. Докажите, что прямое произведение линейно связных пространств линейно связно.

36. Докажите, что в топологическом пространстве  $X$  с первой аксиомой сч  $\checkmark$  тности для любого подмножества имеют место следующие свойства:

1)  $x \in M' \Leftrightarrow$  существует последовательность  $\{x_n \in M, n=1,2,\dots\}$ , сходящаяся к точке  $x$

2)  $M$  замкнуто, если, и только если, предел любой сходящейся последовательности точек из  $M$  также принадлежит  $M$ .

37. Доказать, что подмножество  $M \subset X$  тогда и только тогда компактно, когда любое покрытие множества  $M$  открытыми множествами в  $X$  содержит конечное подсемейство, также покрывающее  $M$ .

38. Докажите, что непрерывное взаимно однозначное отображение  $f: X \rightarrow Y$  компактного топологического пространства  $X$  в хаусдорфово топологическое пространство  $Y$  есть гомеоморфизм.

39. Доказать компактность комплексных многообразий Грассмана  $G_{k,n}(\mathbb{C})$ .

40. Доказать связность многообразий Грассмана  $G_{k,n}(\mathbb{R})$  и  $G_{k,n}(\mathbb{C})$ .

41. Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме сч  $\checkmark$  тности. Докажите, что  $X$  тогда и только тогда компактно, когда из каждой бесконечной последовательности элементов  $\{x_n, n=1,2,\dots\}$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

42. Пусть  $\xi' \subset \xi$  — подрасслоение расслоения  $\xi$ . Докажите, что существует покрытие  $\{U_\alpha\}$  базы расслоений  $M$ , состоящее из тривиализирующих окрестностей обоих расслоений  $\xi$  и  $\xi'$  (то есть  $\xi|_{U_\alpha}$  и  $\xi'|_{U_\alpha}$  тривиальны) и такие тривиализирующие базисы  $\{e_{\alpha 1}, \dots, e_{\alpha k}\}$  расслоения  $\xi$  над каждой окрестностью  $U_\alpha$ , что первые  $k'$  сечений  $e_{\alpha 1}, \dots, e_{\alpha k'}$  образуют тривиализирующий базис расслоения  $\xi'$  над  $U_\alpha$ . Здесь  $k = \text{rank } \xi$ ,  $k' = \text{rank } \xi'$ .

43. Доказать, что для двух линейных подпространств  $M, N$ , дающих в сумме линейное пространство  $V$ , следующие условия эквивалентны:

а)  $V = M \oplus N$ ;

б) всякий вектор  $\vec{x} \in V$  однозначно представляется в виде суммы  $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ , где  $\vec{y} \in M$ ,  $\vec{z} \in N$ ;

в) нулевой вектор однозначно представляется в виде суммы векторов из  $M$  и  $N$ ;

г) если  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_a, \dots\}$  — базис в  $M$  и  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_b, \dots\}$  — базис в  $N$ , то множество векторов  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_a, \dots, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_b, \dots\}$  образует базис в  $V$ .

44. Пусть  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  и  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$  — два базиса в линейном пространстве  $V$ ,  $\{e^1, \dots, e^n\}$  и  $\{f^1, \dots, f^n\}$  — соответствующие дуальные базисы в  $V^*$  и  $C \in GL(n, \mathbb{K})$  — матрица перехода от базиса  $\{\vec{e}_a\}$  к базису  $\{\vec{f}_b\}$ . Доказать, что матрица перехода от дуального базиса  $\{e^a\}$  к базису  $\{f^b\}$  равна  $(C^{-1})^T$ .

45. Билинейная форма  $(,)$  на конечномерном линейном пространстве  $V$  определяет изоморфизм  $\varphi: V \rightarrow V^*$ . Найти явное выражение для  $\varphi$  во взаимно дуальных базисах пространств  $V$  и  $V^*$  через матрицу  $J = (J_{ab})$  билинейной формы в базисе  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ .

46. Доказать корректность определения линейного оператора  $\hat{A}^+ \in \text{End } \bar{V}^*$ .

Доказать, что если  $n = \dim V < \infty$  и  $A = (A_b^a) \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$  — матрица оператора  $\hat{A}$  в базисе  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  пространства  $V$ , то матрица оператора  $\hat{A}^+$  в дуальном базисе  $\{e^1, \dots, e^n\}$  сопряженного пространства равна  $A^+$ .

47. Пусть  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  и  $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$  — два базиса в линейном пространстве  $V$ ,  $\{e^1, \dots, e^n\}$  и  $\{f^1, \dots, f^n\}$  — соответствующие дуальные базисы в  $V^*$  и  $C \in GL(n, \mathbb{K})$  — матрица перехода от базиса  $\{\vec{e}_a\}$  к базису  $\{\vec{f}_b\}$ . Доказать, что матрица перехода от дуального базиса  $\{e^{\bar{a}}\}$  к базису  $\{f^{\bar{b}}\}$  равна  $(C^{-1})^+$ .

48. Полуторалинейная форма  $\langle, \rangle$  на конечномерном линейном пространстве  $V$  определяет изоморфизм  $\varphi: V \rightarrow V^*$ . Найти явное выражение для  $\varphi$  во взаимно дуальных базисах пространств  $V$  и  $\bar{V}^*$  через матрицу  $J = (J_{\bar{a}b})$  полуторалинейной формы в базисе  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ .

49. Доказать корректность определения тензорного произведения линейных операторов.

50. Выписать в блочной форме всевозможные (всего 16 штук) попарные тензорные произведения матриц единичной матрицы и матриц Паули.

51. Докажите, что если  $A_1, A_2 \in \text{Mat}(m, \mathbb{K})$ ,  $B_1, B_2 \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ , то

$$(A_1 \otimes B_1) \cdot (A_2 \otimes B_2) = (A_1 A_2) \otimes (B_1 B_2).$$

52. Докажите, что если  $A \in \text{Mat}(m, \mathbb{K})$ ,  $B \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ , то

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^n \cdot (\det B)^m.$$

53. Докажите, что  $\text{Alt } \sigma T = \sigma(\text{Alt } T) = \varepsilon(\sigma) \text{Alt } T$ ,  $\text{Sym } \sigma T = \sigma(\text{Sym } T) = \text{Sym } T$  для любого тензора  $T \in V^{p,q}$  и для любой подстановки  $\sigma \in S_q$ .

54. Докажите, что если  $T \in V^{p,q}$  и  $q > 1$ , то  $\text{Alt}(\text{Sym } T) = \text{Sym}(\text{Alt } T) = 0$ .

55. Пусть  $q \leq n = \dim V$  и  $\alpha^1, \dots, \alpha^q \in V^*$  — линейно независимые ковекторы на  $V$ , и пусть  $\beta^1, \dots, \beta^q \in V^*$  — такие ковекторы, что  $\sum_{i=1}^q \alpha^i \wedge \beta^i = 0$ . Докажите, что тогда существуют такие числа  $a^{ij}, i, j = 1, \dots, q$ , что  $a^{ij} = a^{ji}$  и  $\beta^i = \sum_{j=1}^q a^{ij} \alpha^j$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

56. Докажите, что  $\omega \in \wedge^2 V$  тогда и только тогда разложим, когда  $\omega \wedge \omega = 0$ .

57. Пусть  $\alpha^1, \dots, \alpha^q \in V^*$  и пусть  $\beta^i = \sum_{j=1}^q a_j^i \alpha^j$ . Докажите, что

$$\beta^1 \wedge \dots \wedge \beta^q = \det(A) \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^q, \text{ где } A = (a_j^i) \in \text{Mat}(q, \mathbb{K})$$

Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется при правильном ответе студентом на оба теоретических вопроса, решении не менее двух задач экзаменационного билета. При ответе на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов и открытого перечня задач студент дает не менее 80% правильных ответов, демонстрирует понимание взаимосвязей между различными понятиями, свободно владеет терминологией.

Оценка «хорошо» выставляется при правильном ответе студентом не менее чем на один теоретический вопрос, решении не менее двух задач экзаменационного билета. При ответе на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов и открытого перечня задач студент дает не менее 60% правильных ответов, демонстрирует понимание большинства пройденных тем, свободно владеет терминологией.

Оценка «удовлетворительно» выставляется при правильном ответе студентом не менее чем на один теоретический вопрос, решении не менее одной задачи экзаменационного билета. При ответе на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов и открытого перечня задач студент дает не менее 50% правильных ответов, демонстрирует понимание большинства пройденных тем, владеет терминологией.

Если ответ студента не удовлетворяет критериям оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», то выставляется оценка «неудовлетворительно».

Если по результатам текущего контроля (коллоквиума) студент имеет оценку «отлично», то это засчитывается за правильный ответ на первый теоретический вопрос билета на дифференцированном зачете.

#### **4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)**

Тест (ПК-1, ИПК-1.1, ИПК-1.26 ИПК-1.3).

1. Какова размерность комплексного проективного пространства — множества комплексных прямых проходящих через начало координат в  $\mathbb{C}^n$  — как вещественного многообразия?

- а)  $2n - 2$ ;
- б)  $2n + 2$ ;
- в)  $n$ ;
- г)  $2n$ ;
- д)  $n - 1$ .

2. Размерность сферы  $S^2$  как комплексного многообразия равна

- а)  $\pi$ ;
- б) 0;
- в) 1;
- г) 2;
- д) 3.

3. Является ли касательное расслоение к гладкому многообразию линейным пространством?

- а) да, является;
- б) нет, не является.

4. Пусть  $M$  — подмножество плоскости,  $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(1, 1)\}$ . Тогда подмножество  $\{(1, 1)\}$  в  $M$  является

- а) замыканием  $M$ ;
- б) границей  $M$ ;
- в) изолированной точкой;
- г) предельной точкой.

5. Пусть  $M$  — подмножество плоскости,  $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(1, 1)\}$ . Тогда подмножество  $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$  является

- а) замыканием  $M$ ;
- б) внутренностью  $M$ ;
- в) множеством предельных точек для  $M$ ;
- г) границей  $M$ .

6. Отображение  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , заданное формулой  $f(x) = 1$  является (выберите все правильные варианты ответа)

- а) непрерывным;
- б) гомеоморфизмом;
- в) открытым;
- г) замкнутым.

7. Пусть многообразие  $Q$  является конфигурационным пространством механической системы. Тогда касательное расслоение  $TQ$  это

- а) расширенное конфигурационное пространство;
- б) удвоенное конфигурационное пространство;
- в) фазовое пространство импульсов;
- г) фазовое пространство скоростей.

8. Особые точки векторного поля  $\frac{\partial}{\partial x}$  в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$  образуют подмножество

- а)  $x = 0$ ;
- б)  $y = z = 0$ ;
- в)  $x = y = z = 0$ ;
- г)  $\emptyset$ .

9. Интегральными кривыми векторного поля  $\frac{\partial}{\partial x}$  в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$  являются:

- а) прямые, проходящие через точку  $(1, 0, 0)$ ;
- б) прямые, проходящие через начало координат;
- в) прямые, параллельные оси  $OX$ ;
- г) прямые, параллельные оси  $OY$  или оси  $OZ$ .

10. Какие из перечисленных ниже подмножеств в  $\mathbb{R}^3$  являются носителем интегральной кривой векторного поля  $by \frac{\partial}{\partial z} + az \frac{\partial}{\partial y}$  ( $a > 0, b > 0$ )? Выберите все правильные варианты ответа:

а) гипербола  $\frac{y^2}{a} - \frac{z^2}{b} = \text{const} \neq 0$  в любой плоскости, перпендикулярной оси  $Ox$ .

б) каждая из двух прямых  $\frac{y^2}{a} - \frac{z^2}{b} = 0$  в любой плоскости, перпендикулярной оси  $Ox$ .

б) эллипс  $\frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{b} = \text{const} > 0$  в любой плоскости, перпендикулярной оси  $Ox$ .

- в) ось  $OX$ ;
- г) любая точка на оси  $OX$ .



11. Аксиома Хаусдорфа на многообразии обеспечивает (выбрать все правильные ответы):

- а) единственность максимальных интегральных кривых векторных полей;
- б) существование максимальных интегральных кривых векторных полей;
- в) связность многообразия;
- г) существование на многообразии римановой метрики;
- д) единственность предела сходящейся последовательности;
- е) существование у бесконечного подмножества в многообразии предельной точки.

12. Какие из перечисленных подмножеств в  $\mathbb{R}^n$  компактны (выбрать все правильные ответы):

- а) однополостный гиперболоид;
- б) двуполостный гиперболоид;
- в) сфера;
- г) тор;
- д) открытый шар.

13. Какие из перечисленных пространств компактны (выбрать все правильные ответы):

- а) вещественное проективное пространство;
- б) комплексное проективное пространство;
- в) одномерное подпространство в  $\mathbb{R}^n$ ;
- г) вещественная ортогональная группа  $O(n, \mathbb{R})$ .

Ключи: 1 а); 2 в); 3 б); 4 в); 5 б); 6 а), г); 7 г); 8 г); 9 в); 10 а), б), г); 11 а), д); 12 в), г); 13 а), б), г).

### **Информация о разработчиках**

Горбунов Иван Владиславович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теоретической физики физического факультета ТГУ, доцент.