Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Экономметрическое моделирование и стохастические процессы

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математические методы в цифровой экономике

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2024

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2024

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

ПК-1. Способен осуществлять научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки как по отдельным разделам темы, так и при исследовании самостоятельных тем.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности

ИОПК-2.3. Демонстрирует умение отбора среди существующих математических методов, наиболее подходящих для решения конкретной прикладной задачи.

ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

ИПК-1.1. Осуществляет проведение работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:
– контрольная работа;
– коллоквиум.

Задания формулируются по билетам, содержащим один теоретический вопрос и две задачи, призванных оценить усвоение материала на практических занятиях.

Список задач для проведения контрольной работы

1. Доказать, что следующая система множеств является сигма алгеброй:

a. Тривиальная сигма-алгебра;

b. Сигма-алгебра, порожденная множеством;

c. Множество всех подмножеств (булеан).

2. Найти мощность булеана, построенного на основе множества, состоящего из N элементов.

3. Доказать мартингальность/субмартингальность следующих процессов:

a. Y(n)=X(1)+…+X(n), где {X(i)} – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним;

b. Y(n)=X(1)*…*X(n) где {X(i)} – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием равным единице;

c. Y(n)=X(1)+…+X(n) где {X(i)} – последовательность независимых положительно определенных случайных величин с существующим первым моментом.

4. Используя неравенство Чебышева обосновать правило трех сигм для случайной величины с существующим вторым моментом.

5. Получить верхнюю границу для ковариации двух случайных величин, используя неравенство Коши-Буняковского.

6. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариацию процесса скользящего среднего порядка q.

7. Получить представление процесса авторегрессии первого порядка AR(1) через его шум.

8. Найти дисперсию процесса AR(1).

9. Получить оценки МНК и ММП для параметра гауссовского процесса AR(1).

10. Получить МНК-оценку для ARCH(1) процесса.

Примерный перечень теоретических вопросов на коллоквиум

1. Вопрос 1. Примеры случайных процессов и предельные теоремы.

2. Вопрос 2. Определения условного математического ожидания, мартингалов и их свойства.

3. Вопрос 3. Винеровский процесс. Определение. Свойства и предельные теоремы.

4. Вопрос 4. Линейные процессы авторегрессионного типа с дискретным и непрерывным временем. Примеры, условия устойчивости.

5. Вопрос 5. Примеры оптимальных адаптивных прогнозов линейных стохастических динамических систем с дискретным и непрерывным временем и неизвестными параметрами.

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все три вопроса билета.

Оценка «Хорошо» - студент ответил правильно на два вопроса билета.

Оценка «Удовлетворительно» - студент ответил правильно на один вопрос билета

Оценка «Неудовлетворительно» – студента ответил неправильно на все вопросы билета.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзамен в седьмом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из трех частей. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Первая часть представляет собой тест из 5 вопросов, проверяющих ИУК-1.1. Ответы на вопросы первой части даются путем выбора из списка предложенных.

Вторая часть содержит один вопрос, проверяющий ИОПК-2.2. Ответ на вопрос второй части дается в развернутой форме.

Третья часть содержит 2 вопроса, проверяющих ИПК-3.3 и оформленные в виде практических задач. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Примерный перечень теоретических вопросов:

1. Эконометрические модели
2. Модели Крамера-Лундберга
3. Модели финансовой математики
4. Модели (B,S) рынка
5. Модели финансовой математики для распределений с тяжелыми хвостами
6. Задачи финансовой математики для распределений с тяжелыми хвостами
7. Винеровский процесс
8. Функционалы от винеровского процесса
9. Доказательство оптимальности в среднеквадратическом смысле условного математического ожидания как одношагового прогноза
10. Прогнозирование динамических систем

Примеры задач:

Задача 1. Доказать, что мартингал в квадрате есть субмартингал.

Задача 2. Доказать, что условное математическое ожидание есть оптимальный в среднеквадратическом смысле прогноз.

Задача 3. Найти корреляционную функцию винеровского процесса и броуновского моста.

Примерный перечень экзаменационных билетов:

Экзаменационный билет № 1

1. Эконометрические модели
2. Распределений с тяжелыми хвостами
3. Найти мощность булеана, построенного на основе множества, состоящего из N элементов.

Экзаменационный билет № 2

1. Модели Крамера-Лундберга
2. Функционалы от винеровского процесса
3. Получить верхнюю границу для ковариации двух случайных величин, используя неравенство Коши-Буняковского.

Экзаменационный билет № 3

1. Модели финансовой математики
2. Доказательство оптимальности в среднеквадратическом смысле условного математического ожидания как одношагового прогноза
3. Получить представление процесса авторегрессии первого порядка AR(1) через его шум

Экзаменационный билет № 4

1. Модели (B,S) рынка
2. Задачи финансовой математики для распределений с тяжелыми хвостами
3. Найти дисперсию процесса AR(1).

Экзаменационный билет № 5

1. Эконометрические модели
2. Распределений с тяжелыми хвостами
3. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариацию процесса скользящего среднего порядка q.

Экзаменационный билет № 6

1. Модели Крамера-Лундберга
2. Функционалы от винеровского процесса
3. Доказать мартингальность/субмартингальность следующих процессов:

a. Y(n)=X(1)+…+X(n), где {X(i)} – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним;

b. Y(n)=X(1)*…*X(n) где {X(i)} – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием равным единице;

c. Y(n)=X(1)+…+X(n) где {X(i)} – последовательность независимых положительно определенных случайных величин с существующим первым моментом.

Экзаменационный билет № 7

1. Модели финансовой математики
2. Доказательство оптимальности в среднеквадратическом смысле условного математического ожидания как одношагового прогноза
3. Используя неравенство Чебышева, обосновать правило трех сигм для случайной величины с существующим вторым моментом.

Экзаменационный билет № 8

1. Модели (B,S) рынка
2. Задачи финансовой математики для распределений с тяжелыми хвостами
3. Найти мощность булеана, построенного на основе множества, состоящего из N элементов.

Критерии оценивания:

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все три вопроса билета.

Оценка «Хорошо» - студент ответил правильно на два вопроса билета.

Оценка «Удовлетворительно» – студент ответил правильно на один вопрос билета

Оценка «Неудовлетворительно» – студента ответил неправильно на все вопросы билета.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Вариант 1.

1. Выписать стохастические модели эконометрики (AR(p), ARCH(p), AR(p)/ARCH(q)).
2. Выписать одношаговые прогнозы для модели AR(1), оптимальный и адаптивный.

Вариант 2.

1. Записать уравнение скалярного процесса АР(1). Найти условие на начальное значение, когда скалярный устойчивый процесс АР(1) является стационарным.
2. Дать определение винеровского процесса и выписать решение уравнения Орнштейна-Уленбека.

Ответы:

Вариант 1.

№ задания	Ответ к заданию
1	$AR(p):\quad x_k=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_{k-i}+\sigma\xi_k$, $ARCH(p):\quad x_k=\sqrt{\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_{k-i}^2}\,\xi_k$, $AR(p)/ARCH(q):\quad x_k=x_k=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_{k-i}+\sigma_k\xi_k,\quad \sigma_k^2=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_{k-i}^2$, ξ_k - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $E\xi_k=0$, $E\xi_k^2=1$.
2	Оптимальный прогноз $\widehat{x}_k=\lambda_1 x_{k-1}$, адаптивный прогноз $\widehat{x}_k=\widehat{\lambda}_1(k)x_{k-1}$, где $\widehat{\lambda}_1(k)$ - оценка МНК неизвестного параметра λ_1, построенная на интервале $[1,k-1]$.

Вариант 2.

№ задания	Ответ к заданию
1	Процесс $AR(1)$: $x_k = \lambda x_{k-1} + \sigma\xi_k$, ξ_k - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = 1$. Условие стационарности $AR(1)$: $\sigma_0^2 = \dfrac{\sigma^2}{1-\lambda^2}$, где $\sigma_0^2 = Ex_0^2$, $Ex_0 = 0$.
2	Винеровский процесс W_t, $t \in [0,T]$ (броуновское движение) – это случайный процесс, удовлетворяющий условиям: 1) $W_0 = 0$ почти наверное; 2) Процесс W_t имеет независимые приращения; 3) Величины $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ при всех $0 \le s < t < \infty$, т.е. величины $W_t - W_s$ имеют гауссовское распределение с параметрами 0 и $t-s$. Уравнение Орнштейна-Уленбека имеет вид $dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma dW_t$ Решение уравнения Орнштейна-Уленбека имеет вид $r_t = r_0 e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s} dW_s$.

Шкала оценивания остаточных знаний:

Критерий оценивания остаточных знаний	Оценка
Верно решены обе задачи	отлично
В целом верно решены обе задачи, но с недочетами	хорошо
Верно решена одна задача	удовлетворительно
Обе задачи не решены	неудовлетворительно

Информация о разработчиках

Васильев Вячеслав Артурович, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования института прикладной математики и компьютерных наук НИ ТГУ.