

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан физического факультета



С.Н. Филимонов

«15» апреля 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

**Тензорный анализ и интегральные уравнения**

по направлению подготовки

**03.03.02 Физика**

Направленность (профиль) подготовки:

**«Фундаментальная физика»**

Форма обучения

**Очная**

Квалификация

**Бакалавр**


Год приема

**2021**


Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.03.02

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

 О.Н. Чайковская

Председатель УМК

 О.М. Сюсина

Томск – 2021

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ОПК 1 – Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 – Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений;

ИОПК 1.2 – Применяет физические и математические модели и методы при решении теоретических и прикладных задач.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить понятийный аппарат и методы тензорного анализа и интегральных уравнений.

– Научиться применять понятийный аппарат и методы тензорного анализа и интегральных уравнений для решения практических задач профессиональной деятельности.

## **3. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Семестр 5, экзамен.

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для изучения и понимания материала данной дисциплины обучающийся должен владеть основными понятиями и методами дифференциального и интегрального исчисления, линейной алгебры, теории функций комплексного переменного, обобщенных функций, теории дифференциальных уравнений.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины (модуля)**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 часов, из которых:

– лекции: 32 ч.;

– практические занятия: 16 ч.;

– в том числе практическая подготовка: 16 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам**

Тема 1. Тензорный анализ и риманова геометрия.

Линейное пространство. Операции с векторами. Ковекторы. Тензорное произведение линейных пространств. Тензоры в линейных пространствах. Тензорные операции. Определение локально евклидова топологического пространства. Определение многообразия. Определение векторного поля на многообразии. Определение касательного расслоения. Определение ковекторного поля на многообразии. Определение

касательного расслоения. Определение тензорного поля на многообразии, закон преобразования компонент тензора при переходе из карты в карту. Ковариантная производная. Тривиальная связность. Тензор кручения. Параллельный перенос. Тензор кривизны Римана. (Псевдо)римановы многообразия. Связность, согласованная с метрикой. Свойства тензора кривизны. Тензор Эйнштейна, тензор энергии-импульса, уравнения Эйнштейна. Геодезические. Функционал действия для геодезической.

Тема 2. Методы асимптотических оценок.

Асимптотические разложения. Асимптотическое разложение оригинала преобразования Лапласа. Преобразование Меллина. Основные свойства преобразования Меллина. Теорема об аналитической структуре преобразования Меллина. Получение асимптотических разложений с помощью преобразования Меллина. Метод Лапласа. Лемма Ватсона. Метод стационарной фазы. Принцип локализации. Метод перевала (наискорейшего спуска).

Тема 3. Линейные интегральные уравнения.

Основные типы линейных интегральных уравнений. Примеры интегральных преобразований. Уравнения Вольтерра. Гильбертово пространство. Пространство  $L_2[a,b]$ . Пространство  $l_2$ . Ортогональные системы векторов. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Операторы Гильберта-Шмидта. Действия с линейными операторами. Собственные векторы. Эрмитовы и самосопряженные операторы. Норма оператора. Конечномерные операторы. Компактные операторы. Норма Гильберта-Шмидта и свойства операторов Гильберта-Шмидта. Спектральная теорема для самосопряженных операторов Гильберта-Шмидта. Спектральная теорема для самосопряженных операторов общего вида. Канонический вид самосопряженных операторов. Канонический вид компактных операторов. Вычисление собственных функций и собственных значений оператора Фредгольма с вырожденным ядром. Минимаксный принцип Куранта. Задача Штурма-Лиувилля для ЛОДУ второго порядка. Решение неоднородных интегральных уравнений с самосопряженным ядром. Решение неоднородных интегральных уравнений с произвольным ядром. Теорема Фредгольма. Метод последовательных приближений, повторные ядра. Резольвента. Решение уравнений с разностным ядром. Решение уравнения Абеля.

## **9. Текущий контроль по дисциплине**

Текущий контроль по дисциплине проводится с применением балльно-рейтинговой системы, включающей контроль посещаемости, результаты выполнения контрольных работ, заданий и тестов по материалам курса, и фиксируется в форме баллов (нарастающим итогом): посещаемость – максимальный балл 10, выполнение контрольных заданий – 40, тестов – 10. Контрольная точка проводится не менее одного раза в семестр.

## **10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации**

**Экзамен в 5 семестре** проводится в устной форме по экзаменационным билетам.

Результаты экзамена определяются оценкой, исходя из результатов ответов на экзамене (60%) и текущей аттестации в течение семестра (40%) в соответствии с балльной шкалой оценивания: количество набранных баллов более 80 — «отлично», от 65 до 79 — «хорошо», от 50 до 64 — «удовлетворительно, менее 50 баллов — «неудовлетворительно».

Экзаменационный билет состоит из двух частей.

Первая часть содержит основной вопрос, проверяющий сформированность компетенции ОПК 1 в соответствии с индикаторами ИОПК 1.1, ИОПК 1.2. Ответы даются в развернутой форме, включая практические задачи.

Вторая часть содержит 2 дополнительных вопроса из списка контрольных вопросов по курсу (приведен в разделе 11), проверяющих соответствие индикаторам достижения

компетенции ИОПК 1.1, ИОПК 1.2. Ответ на вопрос второй части дается в краткой форме, включающей краткую интерпретацию полученных результатов.

Примерный перечень теоретических вопросов

Вопрос 1. Определение и свойства операторов Гильберта-Шмидта.

Вопрос 2. Свойства тензора Риччи и тензора Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна.

Дополнительные вопросы.

Вопрос 1. Что такое матрица перехода. Как преобразуются координаты вектора при замене базиса в линейном пространстве.

Вопрос 2. Определение преобразования Меллина.

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронные учебные курсы по дисциплине в электронном университете «Moodle»: <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=29187>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

Перечень вопросов, выносимых на экзамен в 5 семестре.

1. Основные типы интегральных уравнений. Примеры.
2. Уравнения Вольтерра. Сведение уравнений Вольтера к уравнениям Фредгольма.
3. Пространство  $L_2$  квадратично интегрируемых функций. Гильбертово пространство.
4. Ортогональные системы векторов.
5. Линейные операторы. Оператор Фредгольма.
6. Действия с линейными операторами.
7. Собственные векторы.
8. Симметричные и компактные операторы.
9. Операторы Гильберта-Шмидта.
10. Вычисление собственных функций и собственных значений для оператора Фредгольма с вырожденным ядром.
11. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства ее решений.
12. Решение неоднородных интегральных уравнений Фредгольма с симметричным ядром.
13. Решение неоднородных интегральных уравнений Фредгольма с произвольным непрерывным ядром.
14. Метод последовательных приближений.
15. Повторные ядра. Резольвента.
16. Решение интегральных уравнений с разностным ядром.
17. Решение интегрального уравнения Абеля.
18. Тензоры в линейном пространстве. Закон преобразования при замене базиса.
19. Тензоры в линейном пространстве. Тензорные операции.
20. Определение многообразия. Скаляры на многообразии.
21. Определение векторного поля на многообразии. Закон преобразования векторных полей при замене координат.
22. Определение векторного поля на многообразии. Закон преобразования ковекторных полей при замене координат.
23. Тензорные поля на многообразии. Тензорные операции.
24. Определение (псевдо)риманова пространства. Сигнатура метрики.
25. Связность и ковариантная производная. Существование связности. Тензор кручения.
26. Параллельный перенос тензорных полей. Тензор кривизны.
27. Тензор кривизны, тождества Бианки и Якоби.
28. Связность, согласованная с метрикой. Дивергенция векторного поля.
29. Геодезические. Функционал действия массивной частицы.
30. Свойства тензора кривизны. Тензор Риччи, скалярная кривизна, тензор Эйнштейна, тензор кривизны Вейля.

31. Свойства тензора Риччи и тензора Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна.
32. Асимптотические разложения. Примеры.
33. Преобразование Меллина. Основные свойства. Примеры.
34. Метод Лапласа, стационарной фазы и наискорейшего спуска.

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

1. Линейные интегральные уравнения: общие понятия и примеры.
2. Уравнения с вырожденным ядром.
3. Резольвента уравнения Фредгольма второго рода.
4. Итерированные ядра.
5. Тензоры в аффинном пространстве, алгебраические операции с тензорами.
6. Тензорные поля в аффинном пространстве. Криволинейные координаты.
7. Преобразование коэффициентов связности в аффинном пространстве.
8. Абсолютный дифференциал и ковариантная производная.
9. Риманово пространство.
10. Приближенное вычисление интегралов методами Лапласа и стационарной фазы.

г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа студента включает:

- углубленное теоретическое изучение разделов курса при подготовке к лекционным и практическим занятиям;
- подготовку к обсуждению материала, в том числе самостоятельный поиск необходимых источников информации, включая научно-образовательные ресурсы сети Интернет;
- подготовку к экзаменам.

Вопросы, вынесенные на самостоятельное изучение.

1. Криволинейные координаты в аффинном пространстве.
2. Пространства с кручением.
3. Банаховы пространства.
4. Ядерные операторы.

Темы для рефератов и учебно-методическая литература для самостоятельной работы по разделам дисциплины «Тензорный анализ и интегральные уравнения»:

Тема 1. Симметрические пространства

Литература:

- 1) Лоос О. Симметрические пространства.
- 2) Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля
- 3) Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства

Тема 2. Теорема Хана-Банаха и её приложения.

Литература:

- 1) Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1
- 2) Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу

Тема 3. Метод ВКБ в физике.

Литература:

- 1) Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика
- 2) Багров В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. Методы математической физики. Асимптотические методы: Учебное пособие
- 3) Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.
- 4) Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Багров В. Г., Белов В. В., Задорожный В. Н., Трифонов А. Ю. Методы математической физики. Т. 1, 2, 3. Томск. Издательство научно-технической литературы, 2002.
2. Багров В. Г., Белов В. В., Задорожный В. Н., Трифонов А. Ю. Элементы современной математической физики. Изд. ТПУ, Томск, 2004.
3. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. - М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
4. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. - М.: Эдиториал УРСС, 2002.
5. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. М.: Изд. МГУ, 1989.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. – М.: Физ.-мат. лит., 2000. – 368 с.
7. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. Учеб. пособие для вузов. – 2-ое изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физматлит, 1986. – 400 с.
8. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М. Наука. 1967. — 664 с.
9. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. Учеб. пособие для вузов. – 2-ое изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физматлит, 1986. – 400 с.
10. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ: Сб. задач Н.И. Кованцов, Г.М. Зражевская, В.Г. Кочаровский, В.И. Михайловский. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев.: Выща. шк., 1989. – 398 с.
11. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного анализа. - М.: Изд-во АН СССР, 1961.
12. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1
13. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу.

б) дополнительная литература:

1. Краснов М.П. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1981.
2. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматлит., 1961
3. Я.М. Котляр, Методы математической физики и задачи гидродинамики.
4. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. Изд-во МГУ, 1993 г., 2000г.
5. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. "Мир", М., 1984г.
6. Мисюркеев И.В. Сборник задач по методам математической физики. – М.: Просвещение, 1975. – 168 с.
7. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.
8. М.: Наука, 1972. 264 с.
9. Кошляков Н. С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: ГИФМЛ, 1962.
10. Сокольников И. Тензорный анализ. – М.: Наука, 1971.
11. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения. – М.: ГИТТЛ, 1957.
12. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1976.
13. Схоутен Я.Т. Тензорный анализ для физиков. – М.: Наука, 1964.

в) ресурсы сети Интернет:

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics.htm>

<http://dmvn.mexmat.net/fcalculus.php>

<https://teach-in.ru/course/functional-analysis-part-1>

### 13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook); системы компьютерной вёрстки LaTeX;

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

– Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>

– ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>

– ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

### 14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате, оснащенные системой («Актру»).

### 15. Информация о разработчиках

Казинский Петр Олегович, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра квантовой теории поля физического факультета ТГУ, профессор.