

МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

Коротаев А.Г.

"\_\_22\_\_"\_\_08\_\_2024 г.

**Фонд оценочных средств по дисциплине**  
Математический анализ

Направление подготовки (специальность)  
12.03.02 Оптотехника

СОГЛАСОВАНО:

Председатель УМК

\_\_\_\_\_ А.П. Коханенко

Томск-2024

ФОС составил(и)

Лобода Юлия Анатольевна, к.т.н., доцент

Рецензент \_\_\_\_\_ Пулятина Е.Н.

# 1. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины/модуля/практики

Компетенция	Индикатор компетенции	Код и наименование результатов обучения (планируемые результаты обучения, характеризующие этапы формирования компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
			Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
<p><b>УК-1</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач</p>	ИУК 1.1 Осуществляет поиск информации, необходимой для решения задачи.	<p>(УК-1) ОР-1.1.1. Знает источники информации (справочные и научные издания, научные периодические издания, специализированные интернет-ресурсы), соответствующие требованиям надежности, научной достоверности, полноты и глубины рассмотрения вопроса.</p> <p>(УК-1) ОР-1.1.2. Умеет осуществлять информационный поиск с использованием справочно-поискового аппарата библиотеки ТГУ, электронно-библиотечных систем поисковых веб-сервисов.</p>	студент не умеет осуществлять информационный поиск с использованием справочно-поискового аппарата библиотеки ТГУ, электронно-библиотечных систем поисковых веб-сервисов	студент поверхностно знает источники информации частично осуществляет информационный поиск с использованием справочно-поискового аппарата библиотеки ТГУ, электронно-библиотечных систем поисковых веб-сервисов	студент в целом успешно применяет информационный поиск с использованием справочно-поискового аппарата библиотеки ТГУ, электронно-библиотечных систем поисковых веб-сервисов	студент уверенно применяет информационный поиск с использованием справочно-поискового аппарата библиотеки ТГУ, электронно-библиотечных систем поисковых веб-сервисов
	ИУК 1.2 Проводит критический анализ различных источников информации (эмпирической, теоретической).	<p>(УК-1) ОР-1.2.1. Умеет критически анализировать результаты информационного поиска, оценивать найденные источники по их актуальности, полноте и глубине рассмотрения вопроса.</p> <p>(УК-1) ОР – 1.2.2. Умеет фиксировать результаты информационного поиска в виде списков литературы, умеет составлять библиографическое описание источника информации.</p> <p>(УК-1) ОР – 1.2.3. Владеет навыком сбора, описания, систематизации и анализа эмпирического материала, необходимого для исследования.</p>	студент не способен анализировать и фиксировать результаты информационного поиска в виде списков литературы	студент поверхностно может анализировать и фиксировать результаты информационного поиска в виде списков литературы	студент владеет некоторыми методами информационного поиска, умеет составлять список литературы	студент отлично владеет методами информационного поиска, умеет составлять список литературы, библиографическое описание источника информации

	ИУК 1.3 Выявляет соотношение части и целого, их взаимосвязь, а также взаимоподчиненность элементов системы в ходе решения.	(УК-1) ОР-1.3.1. Знает способы решения типовых задач математического анализа, называет эти способы, комментируя выбор, находит взаимосвязи в ходе их решения.. (УК-1) ОР – 1.3.2. Предлагает способы решения нестандартных задач (повышенной сложности, междисциплинарных) на основе имеющихся знаний и умений.	студент не владеет способами решения задач математического анализа.	студент испытывает трудности со способами решения задач математического анализа.	студент в целом успешно решает типовые задачи математического анализа.	студент уверенно владеет способами решения типовых задач математического анализа, называет эти способы, комментируя выбор, находит взаимосвязи в ходе их решения .
	ИУК 1.4 Синтезирует новое содержание и рефлексивно интерпретирует результаты анализа.	(УК-1) ОР - 1.4.1. Осуществляет рефлексию в процессе решения задач, оценивая полученные результаты и корректируя задачи или последовательность их выполнения в случае необходимости. (УК-1) ОР – 1.4.2. Способен самостоятельно сформулировать цель при выполнении проекта, представить ее в виде совокупности взаимосвязанных, последовательно выполняемых задач, определить ожидаемые результаты решения отдельных задач и проекта в целом, проанализировать полученные результаты.	студент не осуществляет рефлексию в процессе решения задач .	студент испытывает трудности с оценением результатов решения задач.	студент осуществляет рефлексию в процессе решения задач, но не корректирует полученные результаты.	студент уверенно осуществляет рефлексию в процессе решения задач, корректирует полученные результаты.
<b>ОПК-1</b> Способен применять базовые знания в области физики и радиофизики и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности	ИОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями в области математики и физики, необходимыми для освоения специальных дисциплин.	(ОПК-1) ОР-1.1.1. Знает основные понятие и теоремы математического анализа, возможности применения его теоретических основ и методов, необходимых для освоения специальных дисциплин. (ОПК-1) ОР-1.1.2. Владеет навыками использования теоретических основ базовых разделов математического анализа при решении конкретных задач.	студент не владеет навыками использования теоретических основ базовых разделов математического анализа при решении конкретных задач.	студент испытывает трудности с навыками использования теоретических основ базовых разделов математического анализа при решении конкретных задач.	студент в целом хорошо владеет навыками использования теоретических основ базовых разделов математического анализа при решении конкретных задач.	студент уверенно владеет навыками использования теоретических основ базовых разделов математического анализа при решении конкретных задач.
ОПК-3 Способен проводить экспериментальные исследования и измерения, обрабатывать и	ИОПК 3.1 Выбирает и использует соответствующие ресурсы, современные методики и оборудование для проведения	(ОПК - 3) ОР-3.1.1. Знает соответствующие ресурсы, современные методики и оборудование для проведения экспериментальных исследований и измерений	студент не владеет навыками использования соответствующих ресурсов, современных методик и оборудования	студент испытывает трудности с навыками использования соответствующих ресурсов, современных методик и	студент в целом хорошо владеет навыками использования соответствующих ресурсов, современных методик и оборудования	студент уверенно владеет навыками использования соответствующих ресурсов, современных методик и

представлять полученные данные с учетом специфики оптических измерений.	экспериментальных исследований и измерений	(ОПК - 3) ОР-3.1.2. Владеет навыками использования соответствующих ресурсов, современных методик и оборудования для проведения экспериментальных исследований и измерений	для проведения экспериментальных исследований и измерений	оборудования для проведения экспериментальных исследований и измерений	для проведения экспериментальных исследований и измерений	оборудования для проведения экспериментальных исследований и измерений
	ИОПК 3.2 Обработывает и представляет экспериментальные данные для получения обоснованных выводов	(ОПК - 3) ОР-3.2.1. Владеет навыками обработки и представления полученных экспериментальных данных для получения обоснованных выводов	студент не владеет навыками обработки и представления полученных экспериментальных данных для получения обоснованных выводов	студент испытывает трудности обработки и представления полученных экспериментальных данных для получения обоснованных выводов	студент в целом хорошо владеет навыками обработки и представления полученных экспериментальных данных для получения обоснованных выводов	студент уверенно владеет навыками обработки и представления полученных экспериментальных данных для получения обоснованных выводов

## 2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки образовательных результатов обучения

2.1. Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине (примеры индивидуальных задач для текущего контроля СРС).

В качестве СРС предусмотрено выполнение индивидуальных заданий каждым студентом под своим вариантом. Они выполняются после изучения каждого раздела. Условия индивидуальных заданий представлены в [1]-[3]. Например,

### Индивидуальное задание 1.

**Задача 1.** Изобразить множества  $A$ ,  $B$ ,  $C$  при помощи диаграммы Эйлера. Внести в таблицу результаты указанных операций.

	результат операции
$A \cap B$	
$A \cup C$	
$A \cap B \cap C$	
$A \setminus C$	
$B \setminus (A \cup C)$	
$C \setminus (A \cap B)$	
$C \times B$	

1)  $A = \{2, 4, 5, 7, 9, 12, 13\}$ ,  $B = \{4, 12\}$ ,  $C = \{2, 7, 13\}$ .

**Задача 2.** Даны числовые множества  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Выразить каждое множество явно: записать списком точек или промежутками. Внести в таблицу указанные характеристики множеств.

	$A$	$B$	$C$
конечное (да/нет)			
связное (да/нет)			
дискретное (да/нет)			
замкнутое (да/нет)			
открытое (да/нет)			
ограниченное (да/нет)			
максимум множества			
супремум множества			
минимум множества			
инфимум множества			

1)  $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+2} < x\}$

**Задача 3.** Даны множества  $A, B, C$ , состоящие из пар чисел  $(x, y) \in R^2$ . Изобразить каждое множество на плоскости с декартовой системой координат. Внести в таблицу указанные характеристики множеств.

	$A$	$B$	$C$
связное (да/нет)			
замкнутое (да/нет)			
открытое (да/нет)			
ограниченное (да/нет)			

$$1) \quad A = \left\{ (x, y) : y \geq 2x - 2, y \leq \frac{x}{2} + 4, y \geq 3 - x \right\}$$

### Индивидуальное задание 2.

**Задача 1.** Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  (указать  $N(\varepsilon)$ ):  $a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, a = \frac{3}{2}$ .

**Задача 2.** Вычислить пределы числовых последовательностей:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$ .

**Задача 3.** Вычислить пределы числовых последовательностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)} - \sqrt{n^6-1}}{n}$$

**Задача 5.** Вычислить пределы числовых последовательностей:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 6n + 7}{3n^2 + 20n - 1} \right)^{-n+1}$ .

### Индивидуальное задание 3.

**Задача 1.** Доказать (найти  $\delta(\varepsilon)$ ), что:  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$ .

**Задача 2.** Доказать, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  (найти  $\delta(\varepsilon)$ ):

$$f(x) = 5x^2 - 1, x_0 = 6.$$

**Задача 3.** Вычислить пределы функций:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$ .

**Задача 4.** Вычислить пределы функций:  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ .

### Индивидуальное задание 4.

**Задача 1.** Доказать, что функции являются бесконечно малыми одного порядка малости.

$$f(x) = \operatorname{tg} 2x, \varphi(x) = \operatorname{arcsin} x.$$

**Задача 2.** Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{x^3 - 5x^2}.$$

**Задача 3.** Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

**Задача 4.** Исследовать функции на непрерывность в указанных точках.

$$f(x) = 2^{1/(x-3)} + 1; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

#### **Индивидуальное задание 5.**

Задачи 1-14 к разделу «Дифференциальное исчисление» содержатся в [1, стр. 205].

#### **Индивидуальное задание 6.**

Задачи 1-14 к разделу «Неопределенный интеграл» содержатся в [2, стр. 43].

#### **Индивидуальное задание 7.**

Задачи 1-8 к разделу «Определенный интеграл и его приложения» содержатся в [2, стр. 164].

#### **Индивидуальное задание 8.**

Задачи 1-6 к разделу «Функции нескольких переменных» содержатся в [2, стр. 222].

#### **Индивидуальное задание 9.**

Задачи 1-8 к разделу «Ряды» содержатся в [3, стр. 164].

#### **Индивидуальное задание 10.**

Задачи 1-6 к разделу «Интегрирование» содержатся в [3, стр. 157].

2.2. Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине (примеры задач контрольных работ).

#### **Контрольная работа №1**

1. Вычислить пределы числовых последовательностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - 8} - n\sqrt{n(n^2 + 5)}}{\sqrt{n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 3n + 6}{n^2 + 5n + 1} \right)^{n/2}.$$

2. Доказать, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  (найти  $\delta(\varepsilon)$ ):

$$f(x) = 5x^2 - 1, \quad x_0 = 6.$$

3. Вычислить пределы функций:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3 + x}{9x - 4} \right)^{2x}.$$

4. Исследовать функцию на непрерывность в точках:

$$y = 2^{1/(x-3)} + 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

#### **Контрольная работа №2**



1. Найти производные функций:

$$y = (2^{\cos 3x} + \sin 3x)^3, \quad y = x \cdot \cos^2 x \cdot e^{-x^2}, \quad y = \sqrt{\frac{\cos^2 x + 1}{\sin 2x + 1}}.$$

2. Найти производные функции:

$$y = (\operatorname{tg} 3x)^{x^4}, \quad e^{xy} - x^3 - y^3 = 3, \quad .$$

3. Найти производную второго порядка:

$$y = (x^2 + 1) \ln(1 + x^2).$$

4. Найти дифференциал функции:

$$y = x \cdot \operatorname{tg}^3 x.$$

5. Провести исследование функции и построить график:

$$y = \ln(x^2 + 2x + 2).$$

### Контрольная работа №3

1. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x-3} dx$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$$

$$\int x^3 \sqrt{4-3x^4} dx$$

$$\int x \cdot e^{-11x+1} dx$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_4^9 \frac{x dx}{(1+x^2)^3}$$

3. Найти частные производные функции:

$$u = 3x^2 yz - e^{xyz} + \sqrt{xy}.$$

4. Вычислите градиент скалярного поля  $z = x^2 + 2y^2 - 5$  в точке  $M(2, 1)$ .

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

А)  $y^2 = x + 5$ ,  $y^2 = -x + 4$ , б)  $\rho = a \cos 2\varphi$ .

6. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$$

### Контрольная работа №4

1. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой  $L$  вокруг указанной оси:

$$L: y = x^3 / 3 \quad (-1/2 \leq x \leq 1/2).$$

2. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры  $\Phi$  вокруг указанной оси координат:

$$y^2 = 4 - x, \quad x = 0, \quad Oy.$$

3. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{x^n}{n^2 + 1}}.$$

4. Разложить функцию  $y = \cos^2 x$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0 = \pi / 3$ .

Найти область сходимости полученного ряда.

5. Вычислить двойной интеграл  $\iint (x-2y) dx dy$  по области D:

$$x = 0, y = 7 - x, y = \frac{1}{2}x + 1.$$

2.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине (вопросы к экзамену, задачи).

**Вопросы для подготовки к экзамену по дисциплине «Математический анализ»  
1 семестр**

1. Множества. Действия над множествами.
2. Метод математической индукции.
3. Связные, дискретные, замкнутые, открытые множества.
4. Границы числовых множеств.
5. Функции. Область определения, область значений, свойства. График функции.
6. Свойства функций. Композиция функций.
7. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения.
8. Элементарные функции, их свойства и графики.
9. Явно, неявно, параметрически заданные функции.
10. Последовательность, предел числовой последовательности.
11. Свойства сходящихся последовательностей.
12. Признаки существования предела. Предельный переход в неравенствах.
13. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.
14. Теоремы о пределе монотонной последовательности.
15. Вычисление пределов последовательностей.
16. Первый и второй замечательные пределы (случай дискретного аргумента).
17. Определение предела функции вещественного аргумента по Гейне и по Коши. Геометрический смысл предела функции.
18. Односторонние пределы. Критерий существования предела функций через односторонние пределы. Свойства предела функций.
19. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Предел композиции функции. Теоремы о пределе функций. Первый и второй замечательные пределы (случай непрерывного аргумента).
20. Определение непрерывности функции. Свойства функций, непрерывных в точке. Непрерывность элементарных функций.
21. Функции, непрерывные на отрезке. Теорема Вейерштрасса. Теорема о промежуточном значении.
22. Эквивалентные бесконечно малые.
23. Производная и дифференциал. Геометрический и физический смысл.
24. Правила вычисления производной и дифференциала.
25. Таблица производных основных элементарных функций.
26. Производные и дифференциалы высших порядков.
27. Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
28. Правило Лопиталю. Формула Тейлора.

29. Возрастание, убывание функции. Экстремум функции. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба.
30. Асимптоты. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

### Практические задания к экзамену (1 семестр)

№	Практические задания к экзамену
1	Вычислить предел последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^2 - (2+n)^4}$ .
2	Вычислить предел последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{2n^2+3}}{\sqrt[3]{n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+2}}$ .
3	Вычислить предел последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n-1} \right)^n$ .
4	Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 5x^2 + 6x}$ .
5	Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x}{\sin 3x}$ .
6	Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}$ .
7	Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x+2} - 2}$ .
8	Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ .
9	Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \left( \sqrt{x^2+4} - x \right) \right)$ .
10	Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x} \right)^{3-2x}$ .
11	Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\operatorname{tg} 3x}$ .
12	Исследовать функцию на непрерывность в точках: $f(x) = 5^{1/(x-3)} - 1$ ; $x_1 = 3$ , $x_2 = 4$ .
13	Исследовать функцию на непрерывность в точках: $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x-1, & -1 \leq x \leq 3, \\ -x+5, & x > 3. \end{cases}$
14	Найти производные функций: $y = (x^5 + 3x - 1)^4$ , $y = \frac{\sin^2 x}{(x^3 + 1)}$ , $y = e^{2x} \operatorname{tg} 4x$ .
15	Найти производные функций: $y = 2^{-\cos^4 5x}$ , $y = \sin^2 x \cdot 2^{x^2}$ , $y = \arctg \sqrt{1+x^2}$ .
16	Найти производные функций: $y = \sin(x^5 - \operatorname{tg}^2 x)$ , $y = \sqrt{\frac{\cos^2 x + 1}{\sin 2x + 1}}$ , $y = e^{-x^2} \cos 2x$ .

17	Найти производные функций: $y = 2^{\sqrt{tgx}}$ , $y = \ln(\arcsin \sqrt{x})$ , $y = \ln \sin 3 - \frac{\cos^2 x}{\sin x}$ .
18	Найти производную функции: $y = (tgx)^{\ln x}$ .
19	Найти производную функции: $y = (arctgx)^x$ .
20	Найти производную функции: $\begin{cases} x = \ln(t^2 + 1) \\ y = \sqrt{t^2 + 1}. \end{cases}$
21	Найти производную функции: $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$
22	Найти вторую производную функции: $y = (1 + 4x^2) arctg 2x$ .
23	Найти вторую производную функции: $y = (1 + x^2) \ln(1 + x^2)$ .
24	Вычислить значение второй производной функции, заданной уравнением: $x^2 + 2y^2 - xy + x + y = 4$ в точке $M(1,1)$ .
25	Найти дифференциал функции: $y = \sqrt{arctgx} + (\arcsin x)^2$ .
26	Найти дифференциал второго порядка функции: $y = e^{-x^3}$ .
27	Найти дифференциалы первого и второго порядка функции: $y = (x^2 + 1) arctgx$ .
28	Найти асимптоты кривой: $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ .
29	Исследовать на экстремум функцию: $y = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 5)^2}$ .
30	Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости графика функции: $y = \ln(1 + x^2)$ .

## 2 семестр

1. Неопределенный интеграл. Его свойства.
2. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.
3. Интегрирование рациональных дробей.
4. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций. Интегралы от дифференциальных биномов.
5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.
6. Определение и условия существования определенного интеграла. Классы интегрируемых функций. Свойства определенного интеграла.
7. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Формула замены переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.
9. Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление длины дуги кривой.
10. Вычисление объемов тел. Вычисление площади поверхности тела вращения.

11. Функции  $m$  переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
12. Частные производные. Производные сложных функций.
13. Полный дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала.
14. Производная по направлению. Градиент.
15. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о смешанных производных.
16. Дифференцирование сложных и неявных функций.
17. Экстремумы функции нескольких переменных. Локальный экстремум.
18. Понятие числового ряда. Основные определения и свойства. Необходимый признак сходимости.
19. Ряды с положительными членами. Признаки сравнения. Достаточные признаки сходимости.
20. Функциональные ряды. Равномерная и неравномерная сходимость. Условия равномерной сходимости.
21. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область и радиус сходимости степенного ряда
22. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Ряд Тейлора.
23. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Признаки сходимости несобственных интегралов.
24. Двойной интеграл. Случай прямоугольной области. Случай криволинейной области.
25. Замена переменных в двойном интеграле.
26. Криволинейные интегралы. Формула Грина.

### Практические задания к экзамену (2 семестр)

№	Практические задания к экзамену
1	Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{xdx}{\sqrt{7-3x^2}}$ .
2	Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\ln^3(1-x)dx}{x-1}$ .
3	Найти неопределенный интеграл: $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$ .
4	Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx$ .
5	Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\operatorname{tg}^4 7x}{\cos^2 7x} dx$ .
6	Найти неопределенный интеграл: $\int e^{1-6x^2} x dx$ .
7	Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{3x+9}{x^2-6x+12} dx$ .
8	Найти неопределенный интеграл: $\int x \cos\left(\frac{x}{2}+1\right) dx$ .

9	Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$ .
10	Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{x^2+2x+x}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$ .
11	Вычислить определенный интеграл: $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ .
12	Вычислить определенный интеграл: $\int_1^2 x \ln^2 x dx$ .
13	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией: $y^2 = x+5$ , $y^2 = -x+4$ .
14	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией: $4y = 8x - x^2$ , $4y = x+6$ .
15	Найти частные производные первого и второго порядка функции: $y = e^{xy}$ .
16	Найти частные производные первого и второго порядка функции: $y = x \ln \left( \frac{x}{y} \right)$ .
17	Найти градиент функции $u = x + \ln(z^2 + y^2)$ в точке $M(2,1,1)$ .
18	Найти градиент функции $u = x^3 + \sqrt{z^2 + y^2}$ в точке $M(1,1,0)$ .
19	Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности: $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$ , $M(2, 2, 2\sqrt{2})$ .
20	Найти экстремум функции $z = x^2 - xy + y^2$ .
21	Найти полный дифференциал функции $y = e^{x^3-y^3}$ .
22	Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3-1}$ .
23	Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 2^n}$ .
24	Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 9^n}$ .
25	Разложить функцию в ряд Тейлора $y = \frac{3}{2-x-x^2}$ .
26	Найти полный дифференциал функции $u = z \cdot \arctg(x/y)$ .
27	Найти полный дифференциал второго порядка функции $z = x^3 + y^3 + x^2 y^2$ .
28	Изменить порядок интегрирования $\int_0^1 dx \int_1^{2x} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_1^{2/x} f(x,y) dy$ .
29	Вычислить двойной интеграл по области $D$ , ограниченной линиями: $\iint_D (x^2 + y) dx dy$ , $y = x^2$ , $x = y^2$ .
30	Вычислить двойной интеграл по области $D$ , ограниченной линиями: $\iint_D (2x - y) dx dy$ , $y = x^2$ , $y = \sqrt{x}$ .



## 2.4. Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине (примеры тестовых заданий технологии STACK (Moodle)).

<p>Вопрос 1 Пока нет ответа Балл: 1,00</p>	<p style="text-align: right;">Tidy STACK question tool   Question tests &amp; deployed variants</p> <p>Найдите предел <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{11 \cdot n}</math>.</p> <p>Для этого определите монотонность последовательности <math>\left\{\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}</math>.</p> <p>Последовательность <math>\left\{\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}</math> (No answer given) <math>\downarrow</math></p> <p>Последовательность <math>\left\{\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}</math> ограничена: <math>\forall n \in \mathbb{N}</math></p> <p><input type="text"/> <math>\leq \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n \leq</math> <input type="text"/></p> <p>Предел последовательности <math>\left\{\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}</math> равен корню степени <input type="text"/> из числа <math>e</math>.</p> <p>Тогда <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{11 \cdot n} =</math></p> <p><input type="text"/></p> <p><i>Для последнего ответа используйте число <math>e</math>, а не его приближенные значения!</i></p>
<p>Вопрос 1 Пока нет ответа Балл: 1,00</p>	<p style="text-align: right;">Tidy STACK question tool   Question tests &amp; deployed variants</p> <p>Так как <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{14n+5} = \frac{1}{7}</math></p> <p>укажите для <math>\varepsilon = \frac{1}{80}</math> минимальное натуральное число <math>N</math> такое, что при <math>n \in \mathbb{N}, n &gt; N, \left \frac{2n+5}{14n+5} - \frac{1}{7}\right  &lt; \varepsilon</math>.</p> <p><math>N =</math> <input type="text"/></p>
<p>Вопрос 1 Пока нет ответа Балл: 2,00</p>	<p style="text-align: right;">Tidy STACK question tool   Question tests &amp; deployed variants</p> <p>Найти</p> $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{12-x} - \sqrt{x+4}}{x-4}$ <p>Ответ: <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{12-x} - \sqrt{x+4}}{x-4} =</math> <input type="text"/></p>
<p>Вопрос 1 Пока нет ответа Балл: 1,00</p>	<p style="text-align: right;">Tidy STACK question tool   Question tests &amp; deployed variants</p> <p>Найти</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + 89}{3^n + 54}$ <p>Ответ:</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + 89}{3^n + 54} =$ <input type="text"/>
<p>Вопрос 1 Пока нет ответа Балл: 1,00</p>	<p style="text-align: right;">Tidy STACK question tool   Question tests &amp; deployed variants</p> <p>Найти односторонний предел <math>\lim_{x \rightarrow 7+0} \frac{ x-7 }{x^3 - x^2 - 34 \cdot x - 56}</math>.</p> $\lim_{x \rightarrow 7+0} \frac{ x-7 }{x^3 - x^2 - 34 \cdot x - 56} =$ <p><input type="text"/></p>
<p>Вопрос 1 Пока нет ответа Балл: 1,00</p>	<p>Исследуйте функцию на экстремум: <math>z = x^3 + y^3 - 6 \cdot (-3) \cdot x \cdot y + 6</math>. Найдите при каких <math>x, y</math> функция имеет локальный максимум.</p> <p>Решение оформите в тетради для домашних работ.</p> <p>Введите значение функции в точке локального максимума (если локального максимума нет или их несколько, введите 0).</p> <p>Ответ: <input type="text"/></p>



Вопрос 1

Пока нет  
ответа

Балл: 1,00

Дано отображение  $f: [-6; -2] \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x) = (x+4)^2 - 6$ .

Это отображение является инъекцией?

(No answer given) ▾

Если нет - укажите хотя бы два разных значения  $x_1, x_2 \in [-6; -2]$ , в которых значения функции совпадают, то есть  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Ответ на второй вопрос - множество (числа через запятую в фигурных скобках). Если таких значений нет ( $f$  - инъекция), то это множество является пустым, то есть {}.

Вопрос 1

Пока нет  
ответа

Балл: 1,00

Вычислите определённый интеграл  $\int_0^{7\pi} 9 \sin\left(\frac{x}{7}\right) dx$

Ответ:

Вопрос 1

Пока нет  
ответа

Балл: 1,00

Вычислить частную производную по  $x$  функции  $f(x, y) = 2 + 8x - x^3y + y^6$  в точке (3;3). Введите числовой ответ. Решение оформляйте в тетради для домашних работ.

Ответ:

Вопрос 1

Пока нет  
ответа

Балл: 1,00

Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности  $z = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6}$  в точке  $(x, y)$ . Решение запишите в тетради для домашних работ.

- a.  $23x - 2y - z = 3 + 4$
- b.  $2 \cdot 3 \cdot x + 2 \cdot y - z = 3 + 4$
- c.  $23x + 2y - z = 3 - 4$
- d.  $3x + 2y - z = 3 + 4$
- e.  $23x + 2y - z = 4$
- f.  $23x + y - z = 3 + 4$
- g.  $2x + 2y - 3z = 3 + 4$
- h.  $23x + 3y - z = 3 + 4$

Вопрос 1

Пока нет  
ответа

Балл: 1,00

Исследуйте на экстремум функцию:

(№ 401)  $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Решение оформите в тетради для домашних работ.

Какие точки требуют дополнительных исследований

Выберите... ▾

Какие точки являются точками локального максимума

Выберите... ▾

Какие точки являются точками локального минимума

Выберите... ▾

Какие точки являются критическими

Выберите... ▾

Вопрос 1

Пока нет  
ответа

Балл: 1,00

Вычислите неопределённый интеграл  $\int x\sqrt{4x^2+1} dx$ .

Выберите один ответ:

- a.  $x^2/2 + (1/8)(4x^2+1)^{(3/2)} + C$
- b.  $(-1/6)(4x^2+1)^{(3/2)} + C$
- c.  $(1/12)(4x^2+1)^{(1/2)} + C$
- d.  $x^2 + (4x^2+1)^{(-1/2)} + C$
- e.  $x^2/2 + (1/6)(4x^2+1)^{(3/2)} + C$
- f.  $(-1/4)(4x^2+1)^{(-1/2)} + C$
- g.  $(1/12)(4x^2+1)^{(3/2)} + C$

Вопрос 1  
Пока нет  
ответа  
Балл: 1,00

Вычислите интеграл  $\int (3x + 2)\ln(x)dx$

Выберите один ответ:

- а.  $3\ln(x) - (3/2)x^2 - 2x + C$
- б.  $((3/2) + 2x)\ln(x) - (3/4)x^2 - 2x + C$
- в.  $((3x + 1)/x - \ln(x) - 2x - (3/4)x^2 + C$
- г.  $((3x + 1)/x - \ln(x) - 2x + C$
- д.  $3\ln(x) - (3/2)x - 2 + C$
- е.  $((3/4) + 2x)\ln(x) - (3/2)x^2 - 2x + C$

Вопрос 1  
Пока нет  
ответа  
Балл: 1,00

Найти

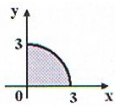
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 4 \cdot n \cdot n!}{14 \cdot (n+1)!}$$

=

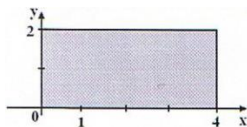
Tidy STACK question tool | Question tests & deployed variants

## 2.5. Тестовые вопросы для оценивания остаточных знаний

- На числовой прямой дана точка  $x = 5,1$ . Тогда ее « $\varepsilon$ -окрестностью» может являться интервал...  
а) (4,9; 5,3), б) (4,8; 5,1), в) (5,1; 5,4), г) (4,9; 5,5).
- Число 2,5 принадлежит множеству ...  
а)  $C = \{c \in R, -3 < c \leq 2,6\}$ , б)  $A = \{a \in N, 1 \leq a < 10\}$ , в)  $D = \{d \in Q, d < 2\}$ ,  
г)  $B = \{b \in H, -2 \leq b < 3\}$ .
- Мера множества, изображенного на рисунке, равна



- ...
- Мера множества, заданного на координатной плоскости, равна



- а) 8, б) 12, в) 4, г) 16.
- Образом отрезка  $[0; 1]$  при отображении  $f = 3x + 2$  является...  
а)  $[2; 5]$ , б)  $[0; 3]$ , в)  $(2; 5)$ , г)  $[2; 3]$ .
  - Объединением множеств  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  и  $B = \{b, g, f\}$  является множество...  
а)  $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ , б)  $\{b, f\}$ , в)  $\{a, c, d, e\}$ , г)  $\{a, b, c, d, e, f\}$ .
  - Дана функция  $y = \sqrt{5 - 4x - x^2} + \lg(x + 3)$ . Тогда ее область определения является множеством...  
а)  $(-3; 1]$ , б)  $[-3; 1]$ , в)  $(-3; -5] \cup [1; +\infty)$ , г)  $(-3; 1)$ .
  - Общий член последовательности  $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \dots$  имеет вид...

а)  $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$ , б)  $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$ , в)  $a_n = (-1)^n \frac{2n-1}{n^2}$ , г)  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n^2}$ .

9. Укажите правильное утверждение относительно сходимости числовых рядов

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  и 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  :

а) 1 – сходится, 2 – расходится, б) 1 – расходится, 2 – сходится, в) 1 и 2 сходятся, г) 1 и 2 расходятся.

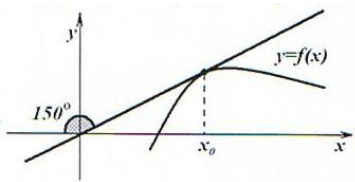
10. Если  $f(x) = x^3 - 1$ , то коэффициент  $a_4$  разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням  $(x-1)$  равен...

а) 0, б) 1, в) 3, г) 0,25.

11. Производная функции  $y = \sin(x^2 + 1)$  имеет вид...

а)  $2x \cos(x^2 + 1)$ , б)  $-2x \cos(x^2 + 1)$ , в)  $x \cos(x^2 + 1)$ , г)  $\cos(x^2 + 1)$ .

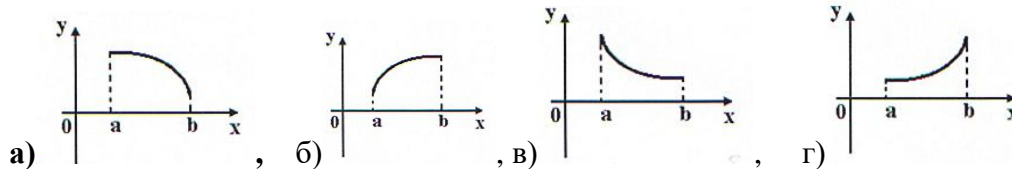
12. График функции  $y = f(x)$  изображен на рисунке.



Тогда значение производной этой функции в точке  $x_0$  равно...

а)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , б)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ , в)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , г)  $-\sqrt{3}$ .

13. Укажите вид графика функции, для которой на всем отрезке  $[a; b]$  одновременно выполняются условия  $y > 0$ ,  $y' < 0$ ,  $y'' < 0$ .



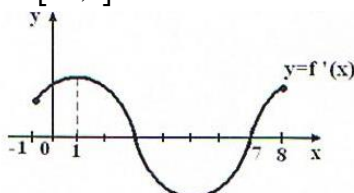
14. Производная функции  $y = 2x^4 + \sqrt{x} + 3$  имеет вид...

а)  $8x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , б)  $x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ , в)  $4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , г)  $8x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$ .

15. Частная производная функции  $z = x^4 \cos y$  по переменной  $y$  в точке  $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$  равна...

а) -1, б) 4, в) 0, г) 1.

16. На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , заданной на отрезке  $[-1; 8]$ .



Тогда точкой максимума этой функции является ...

а) 3, б) 7, в) 1, г) 8.

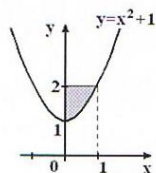
17. Множеством первообразных функции  $f(x) = e^{2x+1}$  имеет вид...

а)  $\frac{1}{2}e^{2x+1} + C$ , б)  $2e^{2x+1} + C$ , в)  $-2e^{2x+1} + C$ , г)  $e^{2x+1} + C$ .

18. Множество первообразных для функции  $f(x) = \cos 4x$  имеет вид...

а)  $0,25 \sin 4x + C$ , б)  $-4 \sin 4x + C$ , в)  $-0,25 \sin 4x + C$ , г)  $4 \sin 4x + C$ .

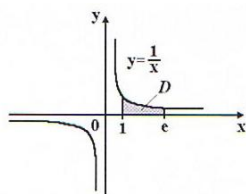
19. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, определяется интегралом



...

а)  $\int_0^1 (1 - x^2) dx$ , б)  $\int_0^1 (2 - x^2) dx$ , в)  $\int_0^2 (1 - x^2) dx$ , г)  $\int_0^1 (x^2 + 1) dx$ .

20. Площадь криволинейной трапеции **D** равна



...

а) 1, б)  $e$ , в) 2, г)  $2e$ .

21. Дан радиус-вектор, движущийся в пространстве точки  $\overline{R}(t) = t^3 \cdot \overline{i} + t^2 \cdot \overline{j} + t \cdot \overline{k}$ ,

тогда вектор ускорения точки в момент времени  $t = 1$  имеет вид...

а)  $6\overline{i} + 2\overline{j}$ , б)  $6\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ , в)  $2\overline{i} + 2\overline{j}$ , г)  $\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ .

22. Градиент скалярного поля  $u = xy + 2z - z^2$  в точке  $M(1;1;0)$  имеет вид...

а)  $\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$ , б)  $\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$ , в)  $\overline{i} + \overline{j}$ , г)  $\overline{i} + \overline{k}$ .

23. Производная скалярного поля  $u = x^2 + 3xy^2$  в точке  $M(1;1)$  в направлении единичного вектора  $\overline{e} = (0;1)$  равна...

а) 6, б) 11, в) 5, г) 1.

#### 4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов обучения

3.1. Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Текущий контроль осуществляется при помощи выполнения контрольных работ обучающимися.

Для выставления текущей успеваемости при контроле СРС рекомендуется использовать следующую таблицу.

Оценка результатов контроля СРС	Критерии соответствия
(отлично)	Решены все задачи. Студент четко и логично изложил решение задач.
(хорошо)	Студент решил все задачи, но не в полном объеме, т.е. при решении применяется верная методика, но имеют место ошибки при решении.
(удовлетворительно)	Студент решил половину задач в полном объеме, с несущественными недочетами.
(неудовлетворительно)	Студент решил менее половины задач с нарушением логики изложения. Студент очень плохо владеет основными методами решения. Допущены существенные ошибки.

3.2. Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Экзамен по результатам изучения дисциплины «Математический анализ» проводится в устной форме по экзаменационным билетам. Билет включает два теоретических вопроса и две задачи. При подготовке к экзамену обучающемуся рекомендуется повторить весь теоретический материал по соответствующим темам с выявлением ключевых теоретических аспектов и проблем, проработкой дополнительного материала по темам. Лучшему пониманию теоретического материала дисциплины будет способствовать разбор деталей определений, вывода и доказательств утверждений, выявление взаимосвязей между определениями, утверждениями и свойствами объектов, изучаемых в дисциплине. Не рекомендуется в процессе подготовки использовать непроверенные источники информации.

Оценка по результатам экзамена	Критерии соответствия
(отлично)	Дан полный и развернутый ответ на два теоретических вопроса. Решены все задачи. Студент четко и логично изложил решение задач.
(хорошо)	Дан неполный ответ на теоретические вопросы. Студент решил все задачи, но с арифметическими ошибками или мелкими недочетами.
(удовлетворительно)	Дан ответ на один теоретический вопрос. Студент решил одну задачу, есть арифметические ошибки.
(неудовлетворительно)	Не даны ответы на теоретические вопросы. Студент не решил две задачи, либо решил с нарушением логики изложения. Студент очень плохо владеет основными методами решения. Допущены существенные ошибки.

#### Список литературы:

1. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие : в 4 частях / под общей редакцией А. П. Рябушко. — 7-е изд. — Минск : Вышэйшая школа, [б. г.]. — Часть 1 : Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной — 2013. — 304 с.
2. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие : в 4 частях / под общей редакцией А. П. Рябушко. — 6-е изд. — Минск : Вышэйшая школа, [б. г.]. — Часть 2 : Комплексные числа. Неопределенные и определенные

интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения — 2014. — 396 с.

3. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие : в 4 частях / под общей редакцией А. П. Рябушко. — 6-е изд. — Минск : Вышэйшая школа, [б. г.]. — Часть 3 : Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля — 2013. — 367 с.