

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:  
Декан

Л. В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

**Вариационное исчисление и методы оптимизации**

по направлению подготовки

**01.03.01 Математика**

Направленность (профиль) подготовки :

**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Бакалавр**

Год приема  
**2022, 2023**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОП  
Л.В. Гензе

Председатель УМК  
Е.А. Тарасов

Томск – 2025

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– фундаментальная подготовка и формирование прочных теоретических знаний и практических навыков для возможности дальнейшего развития Вариационного исчисления и методов оптимизации и использование его в прикладных задачах.

## **3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Седьмой семестр, зачет с оценкой

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: математический анализ, геометрия, алгебра, дифференциальные уравнения, функциональный анализ.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

-практические занятия: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины, структурированное по темам**

Тема 1. **Экстремальные задачи.**

Задачи Дидоны и Апполония. Задачи вариационного исчисления. Задачи линейного программирования. Задачи оптимального управления.

Тема 2. **Простейшая задача вариационного исчисления.**

Постановка задачи, основные определения. Уравнение Эйлера. Необходимые условия. Первые интегралы Эйлера. Задача о брахистохроне.

### **Тема 3. Задача Больца.**

Постановка задачи, основные определения. Уравнение Эйлера. Необходимые условия.

### **Тема 4. Элементы функционального анализа.**

Линейное и нормированное банахово пространство. Факторпространство банахова пространства. Теорема Хана–Банаха и её следствия. Теорема Банаха об обратном операторе. Вторая теорема отделимости. Теорема об аннуляторе ядра.

### **Тема 5. Основы дифференциального исчисления в нормированных пространствах.**

Определения производных (Гато, Фреше, строгой). Простейшие свойства производных. Теорема о композиции дифференцируемых отображений. Теорема о среднем. Дифференцируемость в произведении пространств, частные производные.

### **Тема 6. Дифференцируемость некоторых конкретных отображений.**

Оператор Немыцкого. Оператор дифференциальной связи. Интегральные отображения. Оператор краевых условий.

### **Тема 7. Теорема Люстерника.**

Теорема об оценках расстояния. Касательные векторы. Теорема Люстерника о касательном пространстве.

### **Тема 8. Задача с ограничением типа равенств.**

Постановка задачи, основные определения. Принцип Лагранжа.

### **Тема 9. Выпуклые экстремальные задачи.**

Выпуклые функции и множества. Конечномерная теорема отделимости. Постановка выпуклой задачи. Принцип Лагранжа для выпуклой задачи.

### **Тема 10. Задача Лагранжа.**

Постановка задачи, основные определения. Функции ограниченных вариаций. Теорема Рисса. Необходимые условия экстремума: принцип Лагранжа.

### **Тема 11. Принцип максимума Понтрягина.**

Вводные замечания. Задача со свободным концом. Необходимые условия минимума. Игольчатые вариации.

### **Тема 12. Существование решений экстремальных задач.**

Предварительные сведения. Принцип компактности. Пространства Соболева. Коэрцитивность и условия роста. Теорема Тоннели.

## **9. Текущий контроль по дисциплине**

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, выполнения домашних индивидуальных заданий, и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

## **10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации**

Зачет с оценкой в седьмом семестре проводится по билетам. Билет содержит теоретический вопрос и задачу. Продолжительность зачета с оценкой 1,5 часа.

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

### **Перечень теоретических вопросов.**

1. Примеры экстремальных задач.
2. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
3. Лемма Дюбуа-Раймона.

4. Первые интегралы уравнения Эйлера.
5. Задача о брахистохроне и её решение.
6. Задача Больца. Необходимые условия.
7. Линейные нормированные и банаховы пространства.
8. Факторпространство банахова пространства.
9. Определение производной Гато и его однозначность. Примеры.
10. Определение производной Фреше и его однозначность. Примеры.
11. Определение строгой дифференцируемости и его однозначность. Примеры.
12. Теорема о композиции дифференцируемых отображений. Примеры.
13. Теорема о среднем и её следствие.
14. Отображения непрерывно дифференцируемые по Гато, Фреше, строго.
15. Частные производные в смысле Гато, Фреше. Теорема о полном дифференциале
16. Оператор Немыцкого и его дифференцируемость.
17. Оператор дифференцируемой связи и его производная.
18. Интегральный функционал и его производная.
19. Оператор краевых условий и его дифференцируемость.
20. Теорема Люстерника о касательном пространстве.
21. Принцип Лагранжа для задач с ограничением типа равенств.
22. Выпуклые функции и множества. Примеры.
23. Выпуклая экстремальная задача.
24. Теорема Куна-Таккера.
25. Конечномерная задача и её решение.
26. Задача Лагранжа и её решение.
27. Принцип максимума для задач оптимального управления.
28. Задача со свободным концом и её решение.

## **11. Учебно-методическое обеспечение**

- а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle»  
- <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=6071>
- б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.
- в) План лекционных и практических занятий по дисциплине.
- г) Методические указания по проведению практических занятий.
- д) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

## **12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет**

- а) основная литература:
  - В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин, Оптимальное управление: учебное пособие. 3-е изд., испр. и доп., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 408 с.

- С.А. Ашманов, А.В. Тимохов, Теория оптимизации в задачах и упражнениях: учебное пособие. 2-е изд., стер., СПб: Лань, 2022. - 448 с.
- Ф.П. Васильев, Методы оптимизации: учебное пособие. Часть 1: Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. М.: МЦНМО, 2021. - 619 с.
- В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров, Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп., М: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 256 с.

б) дополнительная литература:

- Э.М. Галеев, М.И. Зеликин, С.В. Конягин, Оптимальное управление: монография. М.: МЦНМО, 2008. - 320 с.
- А.В. Пантелеев, Вариационное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие. М.: Высшая школа, 2006. – 271 с.

в) ресурсы сети Интернет:

- Архив научных журналов – <https://arch.neicon.ru/xmlui/>
- Национальная электронная библиотека – <https://rusneb.ru/>
- База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций – <https://infoneeds.kubsu.ru/infoneeds/>
- Открытый образовательный видеопортал UniverTV.ru. Лекции в ведущих российских и зарубежных вузах – <http://univertv.ru/video/matematika/>
- Учебно-образовательная физико-математическая библиотека – <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>

### **13. Перечень информационных технологий**

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
- ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
- Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
- ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
- ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

## **15. Информация о разработчиках**

Пчелинцев Валерий Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ