

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан

Л. В. Гензе

Рабочая программа дисциплины

Вариационное исчисление и методы оптимизации

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2022, 2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В. Гензе

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2025

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.

2. Задачи освоения дисциплины

– фундаментальная подготовка и формирование прочных теоретических знаний и практических навыков для возможности дальнейшего развития Вариационного исчисления и методов оптимизации и использование его в прикладных задачах.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Седьмой семестр, зачет с оценкой

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: математический анализ, геометрия, алгебра, дифференциальные уравнения, функциональный анализ.

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

-практические занятия: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Экстремальные задачи.

Задачи Диодоны и Апполония. Задачи вариационного исчисления. Задачи линейного программирования. Задачи оптимального управления.

Тема 2. Простейшая задача вариационного исчисления.

Постановка задачи, основные определения. Уравнение Эйлера. Необходимые условия. Первые интегралы Эйлера. Задача о брахистохроне.

Тема 3. Задача Больца.

Постановка задачи, основные определения. Уравнение Эйлера. Необходимые условия.

Тема 4. Элементы функционального анализа.

Линейное и нормированное банахово пространство. Факторпространство банахова пространства. Теорема Хана–Банаха и её следствия. Теорема Банаха об обратном операторе. Вторая теорема отделимости. Теорема об аннуляторе ядра.

Тема 5. Основы дифференциального исчисления в нормированных пространствах.

Определения производных (Гато, Фреше, строгой). Простейшие свойства производных. Теорема о композиции дифференцируемых отображений. Теорема о среднем. Дифференцируемость в произведении пространств, частные производные.

Тема 6. Дифференцируемость некоторых конкретных отображений.

Оператор Немышкого. Оператор дифференциальной связи. Интегральные отображения. Оператор краевых условий.

Тема 7. Теорема Люстерника.

Теорема об оценках расстояния. Касательные векторы. Теорема Люстерника о касательном пространстве.

Тема 8. Задача с ограничением типа равенств.

Постановка задачи, основные определения. Принцип Лагранжа.

Тема 9. Выпуклые экстремальные задачи.

Выпуклые функции и множества. Конечномерная теорема отделимости. Постановка выпуклой задачи. Принцип Лагранжа для выпуклой задачи.

Тема 10. Задача Лагранжа.

Постановка задачи, основные определения. Функции ограниченных вариаций. Теорема Рисса. Необходимые условия экстремума: принцип Лагранжа.

Тема 11. Принцип максимума Понтрягина.

Вводные замечания. Задача со свободным концом. Необходимые условия минимума. Игольчатые вариации.

Тема 12. Существование решений экстремальных задач.

Предварительные сведения. Принцип компактности. Пространства Соболева. Коэрцитивность и условия роста. Теорема Тоннели.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, выполнения домашних индивидуальных заданий, и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет с оценкой в седьмом семестре проводится по билетам. Билет содержит теоретический вопрос и задачу. Продолжительность зачета с оценкой 1,5 часа.

Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации размещены на сайте ТГУ в разделе «Информация об образовательной программе» - <https://www.tsu.ru/sveden/education/eduop/>.

Перечень теоретических вопросов.

1. Примеры экстремальных задач.
2. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
3. Лемма Дюбуа-Раймона.

4. Первые интегралы уравнения Эйлера.
5. Задача о брахистохроне и её решение.
6. Задача Больца. Необходимые условия.
7. Линейные нормированные и банаховы пространства.
8. Факторпространство банахова пространства.
9. Определение производной Гато и его однозначность. Примеры.
10. Определение производной Фреше и его однозначность. Примеры.
11. Определение строгой дифференцируемости и его однозначность. Примеры.
12. Теорема о композиции дифференцируемых отображений. Примеры.
13. Теорема о среднем и её следствие.
14. Отображения непрерывно дифференцируемые по Гато, Фреше, строго.
15. Частные производные в смысле Гато, Фреше. Теорема о полном дифференциале
16. Оператор Немышцкого и его дифференцируемость.
17. Оператор дифференцируемой связи и его производная.
18. Интегральный функционал и его производная.
19. Оператор краевых условий и его дифференцируемость.
20. Теорема Люстерника о касательном пространстве.
21. Принцип Лагранжа для задач с ограничением типа равенств.
22. Выпуклые функции и множества. Примеры.
23. Выпуклая экстремальная задача.
24. Теорема Куна-Таккера.
25. Конечномерная задача и её решение.
26. Задача Лагранжа и её решение.
27. Принцип максимума для задач оптимального управления.
28. Задача со свободным концом и её решение.

11. Учебно-методическое обеспечение

- a) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle»
- <https://lms.tsu.ru/course/view.php?id=6071>
- б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.
- в) План лекционных и практических занятий по дисциплине.
- г) Методические указания по проведению практических занятий.
- д) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

- а) основная литература:
– В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин, Оптимальное управление: учебное пособие. 3-е изд., испр. и доп., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 408 с.

- С.А. Ашманов, А.В. Тимохов, Теория оптимизации в задачах и упражнениях: учебное пособие. 2-е изд., стер., СПб: Лань, 2022. - 448 с.
- Ф.П. Васильев, Методы оптимизации: учебное пособие. Часть 1: Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. М.: МЦНМО, 2021. - 619 с.
- В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров, Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп., М: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 256 с.

б) дополнительная литература:

- Э.М. Галеев, М.И. Зеликин, С.В. Конягин, Оптимальное управление: монография. М.: МЦНМО, 2008. - 320 с.
- А.В. Пантелеев, Вариационное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие. М.: Высшая школа, 2006. – 271 с.

в) ресурсы сети Интернет:

- Архив научных журналов – <https://arch.neicon.ru/xmlui/>
- Национальная электронная библиотека – <https://rusneb.ru/>
- База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций – <https://infoneeds.kubsu.ru/infoneeds/>
 - Открытый образовательный видеопортал UniverTV.ru. Лекции в ведущих российских и зарубежных вузах – <http://univerty.ru/video/matematika/>
 - Учебно-образовательная физико-математическая библиотека – <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office On-eNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
 - ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
 - ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
 - Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
 - ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
 - ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Пчелинцев Валерий Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры матем. анализа и теории функций ММФ ТГУ