Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физико-технический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан
Ю.Н. Рыжих

Оценочные материалы по дисциплине

Теория функций комплексной переменной

по направлению подготовки

15.03.06 Мехатроника и робототехника

Направленность (профиль) подготовки:
Промышленная и специальная робототехника

Форма обучения
Очная

Квалификация
Инженер, инженер-разработчик

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОПОП
Е.И. Борзенко

Председатель УМК
В.А. Скрипняк

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-2 Способен выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-2.1 Знает методику выявления естественнонаучной сущности проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и методику привлечения физико-математического аппарата и современные компьютерных технологий для их решения

РООПК-2.2 Умеет выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности и привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– контрольная работа.

Контрольная работа №1 (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Контрольная работа №1 состоит из 3 задач.

Примеры задач:

Задача 1

Выяснить геометрическое множество точек $|z-i|+|z+i|<4$

Задача 2

Вычислить $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{40}$

Задача 3

Найти действительную и мнимую части функции $f(z)=\cos(1+2z)$

Ответы:

Задача 1. Множество точек, находящееся внутри эллипса $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.

Задача 2. 1

Задача 3. $\mathrm{Re}\left[f(z)\right]=\cos(1+2x)\mathrm{ch}(2\mathrm{y})$; $\mathrm{Im}\left[f(z)\right]=\sin(1+2x)\mathrm{sh}(2\mathrm{y})$

Контрольная работа №2 (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

Контрольная работа №2 состоит из 2 задач.

Примеры задач:

Задача №1

Вычислить интеграл от функции комплексной переменной $\oint\limits_{|z-i|=2}\frac{e^{2z}}{(z^2+4)^2}dz$

Задача №2

Вычислить интеграл от функции действительной переменной $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$

Ответы:

Задача №1 $\frac{\pi e^{4i}}{16}(1-4i)$

Задача №2 $\frac{\pi e^{-2}}{8}\left(1-\frac{e^{-4}}{3}\right)$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка	Критерии соответствия
Отлично	> 90% заданий выполнено правильно
Хорошо	70% – 90% заданий выполнено правильно
Удовлетворительно	50% – 70% заданий выполнено правильно
Неудовлетворительно	< 50% заданий выполнено правильно

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет с оценкой в четвертом семестре проводится в форме теста. К тесту допускаются студенты, получившие по двум контрольным работам положительные оценки. Тест состоит из 20 вопросов, проверяющих РООПК-2.1, РООПК-2.2. В тесте присутствую как вопросы, проверяющие знание теоретического материала, так и вопросы, проверяющие умение решать задачи.

Перечень теоретических вопросов

1 Понятие комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
2 Алгебраическая форма записи комплексных чисел и операции сложения, вычитания, умножения и деления. Сопряженное комплексное число.
3 Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Геометрический смысл сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел. Неравенства треугольника.
4 Возведение комплексного числа в целую степень. Формула Муавра. Извлечение корня.
5 Возведение действительного числа в комплексную степень. Вывод формулы Эйлера.
6 Показательная форма записи комплексных чисел. Логарифм комплексного числа. Главное значение логарифма.
7 Вывод условий Коши-Римана. Понятие аналитической функции. Независимость производной аналитической функции от направления дифференцирования. Условия Коши-Римана в полярных координатах.
8 Уравнение Лапласа. Сопряженные гармонические функции. Определение гармонической функции по известной сопряженной ей гармонической функции.

9 Понятие интеграла от функции комплексной переменной. Условия независимости интеграла от пути интегрирования. Теорема Коши (в том числе для многосвязных областей).
10 Понятие первообразной аналитической функции. Вывод формулы Ньютона-Лейбница.
11 Вывод интегральной формулы Коши.
12 Теорема о среднем для аналитических функций.
13 Принцип максимума модуля аналитической функции и его обоснование.
14 Вывод интегральной формулы для производных высших порядков аналитической функции. Оценки Коши. Теорема Лиувилля.
15 Теорема Абеля. Формулы для определения радиуса круга сходимости степенного ряда.
16 Ряд Тейлора и его единственность.
17 Ряд Лорана. Формула для коэффициентов ряда. Единственность разложения в степенной ряд аналитической в кольце функции.
18 Понятие нуля аналитической функции и его порядка. Теорема единственности для аналитических функций.
19 Классификация особых точек аналитической функции.
20 Вид ряда Лорана в окрестности особых точек аналитической функции.
21 Понятие вычета аналитической функции.
22 Формулы для вычисления вычета в простом полюсе (полюсе первого порядка).
23 Вывод формулы для вычисления вычета в полюсе порядка m.
24 Теорема Коши о вычетах.
25 Понятие бесконечно удаленной точки и вычета в ней.
26 Формы ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.
27 Вычисление с помощью теории вычетов интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$.
28 Вычисление с помощью теории вычетов интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$
29 Вычисление интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)dx$.
30 Доказательство леммы Жордана.
31 Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции $f(z)$.
32 Основная задача теории конформных отображений
33 Дробно-линейная функция. Линейная функция $f(z)=az+b$. Инверсия.
34 Сфера Римана. Конформность дробно-линейного преобразования в особых точках.
35 Инвариантность симметричных точек.
36 Многозначные функции. Точки ветвления.

Примеры теоретических вопросов:

1. Чему равен интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$? Выбрать один или несколько ответов.

А) $f(z_0)$, если точка z_0 лежит вне контура Г.
Б) $f(z_0)$, если точка z_0 лежит внутри контура Г.
В) 0, если точка z_0 лежит внутри или на границе контура Г.
Г) 0, если точка z_0 лежит вне контура Г.
Д) $f(z_0)$, если точка z_0 лежит внутри или на границе контура Г.

2. Известно, что функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Тогда сопряженная ей гармоническая функция $v(x,y)$

А) Может быть найдена из уравнения Лапласа.
Б) Не может быть найдена.
В) Может быть найдена с точностью до константы.
Г) Может быть найдена абсолютно точно.

Примеры задач:

1. При умножении числа $\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)$ на $(-i)$ получится следующее число (Выберите один или несколько ответов):

А) $\exp\left(\frac{5\pi}{4}i\right)$.

Б) $\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right)$.

В) $\exp\left(\frac{7\pi}{4}i\right)$.

Г) $\exp\left(\frac{3\pi}{4}i\right)$.

2. Верно ли, что действительная часть выражения $\left[\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]^5$ равна нулю?

А) Верно.
Б) Неверно.

Критерии оценивания:

Результаты зачета с оценкой определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Для получения зачета с оценкой студент должен сдать итоговый тест и выполнить две контрольные работы.

Результаты выполнения студентами итогового теста и контрольных работ оценивается по 100 балльной шкале, которые переводятся в пятибалльную шкалу по следующей схеме: 59 баллов и ниже – «неудовлетворительно», 60 баллов – 73 балла – «удовлетворительно», 74 балла – 86 баллов – «хорошо», 87 баллов – 100 баллов – «отлично».

Оценка за зачет проставляется как округленное среднеарифметическое значение по трем оценкам (за итоговый тест и за две контрольные работы)

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задачи (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

1. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$в указанной области

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)};\qquad 2<|z|<3$$

2. Охарактеризовать указанную точку для функции

$$f(z)=\frac{e^{z-1}-1-(z-1)}{\sin(z-1)-(z-1)},\ z_0=1$$

3. Найти вычет функции $f(z)=\frac{\exp\left(-1/z^2\right)}{1+z^4}$ в точке z_0=0.

Ответы

1. $-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{z^k}-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^k$

2. Полюс первого порядка.
3. 0.

Тест (РООПК-2.1, РООПК-2.2)

1. Известно, что в окрестности изолированной особой точки z_0 функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана. Сколько членов ряда содержит главная часть ряда Лорана, если изолированная особая точка z_0 является существенно особой точкой?
   Выберите один ответ:
   А) Конечное число членов ряда.
   Б) Ни одного члена ряда.
   В) Бесконечное число членов ряда.

2. Какие утверждения верны?
   А) Любой круг $|z| < R$ комплексной плоскости z нельзя конформно отобразить на единичный круг $|w| < 1$ плоскости w.
   Б) Не всякую односвязную область D комплексной плоскости z, граница которой состоит из более, чем одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости w.
   В) Любой круг $|z| < R$ комплексной плоскости z можно конформно отобразить на единичный круг $|w| < 1$ плоскости w.
   Г) Любую односвязную область D комплексной плоскости z, граница которой состоит из более, чем одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости w.

3. Выберите один ответ: При перемножении комплексных чисел их аргументы
   А) делятся
   Б) умножаются
   В) вычитаются
   Г) складываются

Ключи
1. В)
2. В), Г)
3. Г)

Теоретические вопросы: (РООПК-2.1, РООПК-2.2)
1. Возведение действительного числа в комплексную степень.
Ответ должен содержать последовательность действий, в результате которой получается комплексное число, записанное либо в показательной форме, либо в тригонометрической форме.
2. Вывод условий Коши-Римана.
При выводе условий должно быть использовано определение производной и независимость того каким образом точка $z+\Delta z$ стремится к точке z.
3. Понятие сферы Римана.
В ответе указать основные свойства сферы Римана и правила, по которым точки сферы отображаются на комплексную плоскость.

Информация о разработчиках

Миньков Леонид Леонидович, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета