Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л. В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Групповой анализ дифференциальных уравнений

по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки :
Фундаментальная математика

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
П.А.Крылов

Председатель УМК
Е.А. Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:
– контрольная работа;

Контрольная работа (ИУК 1.1, ИПК-3.3)
Контрольная работа состоит из 2 задач.

Примеры задач:

Задача 1. Применить метод «выпрямления» допускаемого оператора для интегрирования ОДУ $(y')^2 - y - x^2 = 0$ $(\xi\partial) = x\partial_x + 2y\partial_y$

Задача 2. Проверить инвариантность многообразия M, где M – однополостной гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ относительно преобразования группы G заданной оператором $(\xi\partial) = (y + xz)\partial_x + (yz - x)\partial_y + \left(1 + z^2\right)\partial_z$ и записать многообразие M в инвариантах допускаемого оператора.

Задача 3. Показать, что ОДУ $x^2 y'' = F(y, yy')$ допускает оператор $(\partial\zeta) = x\partial_x$ и с его помощью понизить порядок уравнения методом «выпрямления» оператора.

Задача 4. Проинтегрировать уравнение $y' - \frac{x}{y} + \frac{1}{x}\ln\frac{y}{x} = 0$ методом интегрирующего множителя$(\partial\zeta) = x^2\partial_x + xy\partial_y$

Задача 5. Понизить порядок уравнения $xy'' = F\left(yx^{-1}, y'\right)$ методом «выпрямления» оператора, используя оператор $(\partial\zeta) = x\partial_x + y\partial_y$.

Задача 6. Понизить порядок уравнения $x^3 y'' = F\left(x^{-1}y, xy' - y\right)$ методом дифференциальных инвариантов, используя оператор $(\partial\zeta) = x^2\partial_x + xy\partial_y$.

Задача 7. Применить метод «выпрямления» допускаемого оператора
$y' - (x + y)^2 = 0$ $\qquad (\partial\zeta) = \partial_x - \partial_y$

Задача 8. Понизить порядок уравнения $yy'' = y^2 + y^2 F\left(x, \frac{xy'}{y} - \ln y\right)$ методом дифференциальных инвариантов, используя оператор $(\partial\zeta) = xy\partial_y$.

Задача 9. Показать, что ОДУ $xy''+y'=x^2y'^3F\left(y,\frac{y}{xy'}-\ln x\right)$ допускает оператор $(\partial\zeta)=xy\partial_x$ и с его помощью понизить порядок уравнения.

Задача 10. Применить метод «выпрямления» допускаемого оператора
$y'+x^2\sin\frac{y}{x^3}=0 \quad (\partial\zeta)=x\partial_x+3y\partial_y$

Задача 11. Показать, что ОДУ $x^2y''=F(y,yy')$ допускает оператор $(\partial\zeta)=x\partial_x$ и с его помощью понизить порядок уравнения методом дифференциальных инвариантов.

Задача 12. Применить метод «выпрямления» допускаемого оператора
$y'=\frac{y+x\sqrt{x^2+y^2}}{x-y\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (\partial\zeta)=y\partial_x-x\partial_y$

Задача 13. Показать, что ОДУ $y''=\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}F\left(\sqrt{x^2+y^2},\frac{y-xy'}{x+yy'}\right)$ допускает оператор $(\partial\zeta)=y\partial_x-x\partial_y$ и с его помощью понизить порядок уравнения.

Задача 14. Применить метод «выпрямления» допускаемого оператора
$xy'-y\ln y+ye^x=0 \qquad (\partial\zeta)=xy\partial_y$

Задача 15. Показать, что ОДУ $xy''=F\left(\frac{y}{x},y'\right)$ допускает оператор $(\partial\zeta)=x\partial_x+y\partial_y$, с его помощью понизить порядок уравнения методом дифференциальных инвариантов.

Задача 16. Применить метод «выпрямления» допускаемого оператора $y'-\frac{y}{x}+xe^{\frac{y}{x}}=0$

$(\partial\zeta)=\partial_x+\frac{y}{x}\partial_y$

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет в третьем семестре проводится в письменной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос и две задачи. Продолжительность зачета 1,5 часа.

Примерный перечень теоретических вопросов

Перечень теоретических вопросов:

1. Однопараметрическая группа преобразований. Канонический параметр.
2. Касательное векторное поле. Уравнение Ли.
3. Инфинитезимальный оператор группы. Инвариант группы. Критерий инварианта.
4. Подобие групп. Инвариантность оператора.
5. Теорема о подобии.
6. Инвариантные многообразия. Критерий инвариантности многообразия.
7. Продолжение пространства. Продолжение преобразования группы.
8. Продолжение инфинитезимального оператора.
9. Дифференциальный инвариант группы. Дифференциальное инвариантное многообразие.

10. Группа, допускаемая дифференциальным уравнением. Алгоритм нахождения допускаемой группы.
11. Алгебра Ли. Многопараметрическая группа.
12. Метод интегрирующего множителя.
13. Метод выпрямления допускаемого оператора.
14. Метод дифференциальных инвариантов.

Примеры задач:

1. Проверить, что уравнение $y^2 y''' = \nu\left(2yy'' - y'^2\right)$, где $y = y(x)$, ν – константа, допускает операторы $(\zeta_1\partial) = \partial_x$, $(\zeta_1\partial) = x\partial_x + y\partial_y$ и используя эти операторы понизить порядок до первого.
2. Найти допустимые операторы для уравнения $y'' - \frac{y'}{x} + e^y = 0$.
3. Проверить, что уравнение $y'' + 2\left(y' - \frac{y}{x}\right)^3 = 0$ допускает Алгебру Ли с базисными операторами $(\zeta_1\partial) = x^2\partial_x + xy\partial_y$, $(\zeta_1\partial) = xy\partial_x + y^2\partial_y$ и проинтегрируйте уравнение с помощью этой алгебры (привести к каноническому виду).
4. Проверить, что $f_a(x, y) = \left(xa, ya^2\right)$ задает группу Ли, найти a_0, a^{-1}, перейти к каноническому параметру.
5. По заданному векторному поля $\xi(x, y) = (x, 2y)$ восстановить группу преобразований
6. Найти преобразования группы, заданной оператором $x^2\partial_x + xy\partial_y$
7. Найти инварианты группы Ли, заданной оператором $y\partial_x - x\partial_y + z\partial_z$
8. Проверить инвариантность многообразия $M : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ относительно преобразования группы, заданной оператором $(\xi\cdot\partial) = (y + xz)\partial_x + (yz - x)\partial_y + \left(1 + z^2\right)\partial_z$
9. Вычислить первое и второе продолжение оператора $(\xi\cdot\partial) = x^2\partial_x + xu\partial_u$
10. Найти допустимые операторы для уравнения $y''(x) = f(x, y, y')$
11. Найти допустимые группы для уравнения $u_x u_{xx} + u_{yy} = 0$

Критерии оценивания:

Студент владеет терминологией, твердо знает программный материал, способен применять знание теории к решению задач, допускают отдельные погрешности и неточности при ответе.	зачтено
обнаруживают значительные пробелы в знаниях основного программного материала, допускают принципиальные ошибки при решении задач и ответе на теоретические вопросы.	не зачтено

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Задачи

Задача 1 (ИПК-3.3)

Показать, что ОДУ второго порядка $xy'' = F\left(x^{-1}yy'\right)$ допускает оператор $\left(\xi\partial\right) = x\partial_x + y\partial_y$

Задача 2 (ИОПК-2.1)

Проверить, образует ли семейства преобразований $f\left(x, y\right) = \left(x + ay, y\right)$, $x, y, a \in \mathbb{R}$ локальную однопараметрическую группу Ли. Найти закон умножения и ввести канонический параметр (если закон умножения не канонический).

Теоретические вопросы:

1. Связь касательного векторного поля и однопараметрической группы преобразований.
2. Группа, допускаемая дифференциальным уравнением.
3. Уравнение Ли.

Информация о разработчиках

Доцент ММФ ТГУ, к.ф.-м.н. Колесников Иван Александрович.