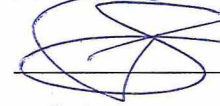


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан



Л. В. Гензе

« 31 » 06 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

Вариационное исчисление и методы оптимизации

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

02.03.01 Математика и компьютерные науки

01.03.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) подготовки :

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук

Основы научно-исследовательской деятельности в области механики и математического
моделирования

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр


Год приема

2022

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.2.16

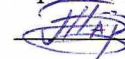
СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП



Л. В. Гензе

Председатель УМК



Е.А. Тарасов

Томск – 2022

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Задачи освоения дисциплины

– фундаментальная подготовка и формирование прочных теоретических знаний и практических навыков для возможности дальнейшего развития Вариационного исчисления и методов оптимизации и использование его в прикладных задачах

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Седьмой семестр, зачет с оценкой

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики», «Алгебра», «Дифференциальные уравнения».

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 часов, из которых:

-лекции: 32 ч.

-практические занятия: 32 ч.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Предмет вариационного исчисления. Основные понятия. План. Литература. Формализация экстремальных задач.

Тема 2. Элементы функционального и выпуклого анализа. Определение вариации по Лагранжу производных по направлению, Гато, Фреше. Основные леммы вариационного исчисления и их применение.

Тема 3. Теорема о полном дифференциале. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Тема 4. Простейшая задача классического вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Правило множителей Лагранжа и теорема Люстерника. Теорема о касательном пространстве.

Тема 5. Необходимые условия в задаче Больца. Условия трансверсальности.

Тема 6. Условия Вейрштрасса

Тема 7. Поле экстремалей.

Тема 8. Условие Якоби.

Тема 9. Изопериметрическая задача

Тема 10. Задачи со старшими производными. Необходимые и достаточные условия

Тема 11. Задачи с подвижными концами. Необходимые и достаточные условия

Тема 12. Задача Лагранжа и основная задача оптимального управления. Необходимые условия в задаче Лагранжа.

Тема 13. Теорема Эйлера-Лагранжа. Правила решения. Примеры

Тема 14. Задачи оптимального управления: Задача Лагранжа.

Тема 15. Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа. Примеры

Тема 16. Теория Гамильтона-Якоби.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, проведения контрольных работ, выполнения домашних индивидуальных заданий, и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет с оценкой в седьмом семестре проводится с помощью защиты рефератов (2 реферата) в течении обучения либо ответ на теоретический вопрос на экзамене.

При этом необходимо предварительно сдать (защитить) задачи, которые предлагались как индивидуальные домашние задания.

Примерный перечень тем рефератов:

1. Историческая справка: задача Дидоны. 2. Геометрические задачи. 3. задача о брахистохроне. 4. Выпуклые функции. 5. Формализация Экстремальных задач. 6. Производные. 7. Импликация. 8. основные леммы ВИ и мет.опт. 9. Основные теоремы дифференциального исчисления в ВИ и мет.опт. 10. Уравнение Эйлера и методы его решения. 11. Примеры экстремалей простейшей задачи. 12. Пример Гильберта.
2. 1. Принцип Лагранжа в выпуклом программировании. 2. Выпуклый анализ и теория экстремальных задач. 3. Задача Больца.необходимые условия. 4. Задачи с подвижными концами. 5. Необходимые и достаточные условия высших порядков.6. Теорема Боголюбова. 7. Теория поля. Уравнение Гамильтона-Якоби. 8. Принцип Лагранжа для изопериметрических задач. 9. Необходимые условия высших порядков и достаточные условия. 10. Принцип Лагранжа для задачи Лагранжа. 11. Принцип Лагранжа для ляпуновских задач. 12. Принцип Максимумы Понтрягина. 13. Достаточные условия в классическом вариационном исчислении. 14. Игольчатые вариации.

Примерный перечень вопросов к экзамену:

1. Основные понятия, связанные с экстремальными задачами. Формализация задач. Примеры.
2. Определения производных. Производная по направлению, вариация по Лагранжу. Производная по Гато.
3. Производные Фреше. Строгая дифференцируемость.

4. Основные теоремы дифференциального исчисления в нормированных пространствах.
5. Теорема о среднем и ее следствия.
6. Лемма о нетривиальности аннулятора.
7. Лемма об аннуляторе ядра регулярного оператора.
8. Изопериметрические задачи. Необходимые условия экстремума.
9. Конечномерные теоремы об обратной и неявной функции. Теорема Люстерника.
10. Теорема о касательном пространстве.
11. Элементы выпуклого анализа. Определения. Теорема Юнга-Фенхеля-Моро.
12. Основные формулы субдифференциального исчисления. Теорема Моро-Рокафеллера.
13. Выпуклые функции. Их свойства. Операции над ними.
14. Элементы теории выпуклых множеств и функций.
15. Выпуклые множества, достаточные условия выпуклости множеств, проекция точки на выпуклое множество,
16. теоремы отделимости.
17. Выпуклые функции и их свойства. Критерии выпуклости дифференцируемых и дважды выпуклых функций.
18. Выпуклое программирование. Постановка задачи выпуклого программирования и ее свойства.
19. Необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.
20. Функция Лагранжа. Достаточные условия регулярности задачи.
21. Теорема Куна-Таккера (доказательство - для гладкой задачи с ограничениями типа неравенства).
22. Интерпретация теоремы Куна-Таккера.
23. Обобщения теоремы Куна-Таккера.
24. Выпуклые задачи. Принцип Лагранжа в выпуклом программировании
25. Задачи выпуклого программирования. Правило множителей Лагранжа.
26. Полунепрерывные снизу и полукompактные функции.
27. Различные эквивалентные определения полунепрерывных снизу функций.
28. Ограниченность снизу любой полунепрерывной снизу функции.
29. Опорные функции и теорема Минковского.
30. Функция Вейерштрасса и условия ее выпуклости.
31. Сопряженные функции и их свойства.
32. Преобразование Юнга-Фенхеля-Моро. Теорема Фенхеля-Моро.
33. Экономическая интерпретация.
34. Свойства сопряженных функций.
35. Субдифференциальное исчисление.
36. Понятие субдифференциала.
37. Выпуклость и замкнутость субдифференциала в нормированном пространстве.
38. Субдифференциал нормы.
39. Теорема Моро-Рокафеллера.
40. Теорема о субдифференциале суперпозиции
41. Теорема Ферма о локальном минимуме.
42. Гладкая задача с ограничениями типа равенств и неравенств. Общий случай. Постановка задачи. Необходимое условие экстремума.
43. Выпуклые задачи. Принцип Лагранжа в выпуклом программировании.
44. Теорема Куна-Таккера (субдифференциальная форма).
45. Теория двойственности экстремальных задач.

46. Задача Больца. Необходимые условия экстремума.
47. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума. Интегралы уравнения Эйлера.
48. Изопериметрические задачи. Необходимые условия экстремума.
49. Теорема Крейна - Мильмана.
50. Задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина.
51. Постановка задач. Связь с задачами вариационного исчисления.
52. Принцип максимума Понтрягина и его применения.
53. Связь принципа максимума с задачами вариационного исчисления. Примеры.
54. Задача Лагранжа. Теорема Эйлера-Лагранжа.
55. Принцип Лагранжа исследования задач с ограничениями. Пример.

Критерии оценивания зачета

| Неудовлетворительно | Удовлетворительно | Хорошо | Отлично |
|---|---|---|---|
| Дан неправильный ответ, однозначно неправильная трактовка темы и/или неверно решены задачи. | В целом дан правильный ответ на вопрос, но он изложен поверхностно и с нарушением логики изложения. Знание минимума литературы. Задачи решены с ошибками. | Дан правильный ответ на вопрос, но не все изложено развернуто и логически структурировано. Знание основной литературы. Задачи решены верно. | Дан правильный и развернутый ответ на вопрос. Студент четко и логично изложил свой ответ на поставленный в билете вопрос. Знание основной и дополнительной литературы. Задачи решены верно. |

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=6071>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

в) План семинарских / практических занятий по дисциплине соответствует темам в п. 8. Содержание дисциплины

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Алексеев В.М., Галлеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимальное управление. М., 1979. – 432 с.

2. Галлеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1989. – 197 с.

3. Алексеев В.М., Галлеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984. – 287 с.

б) дополнительная литература:

4. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1968. 408 с.

5. Иоффе А.Д., Тихомиров В.Н. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

6. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М., 1961. 228 с.

7. Габбасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Мн., 1981. 350 с.

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

15. Информация о разработчиках

Малютина Александра Николаевна, доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ