

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДЕНО:
Директор
А. В. Замятин

Оценочные материалы по дисциплине

Функциональный анализ

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:
Математическое моделирование и информационные системы

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
К.И. Лившиц

Председатель УМК
С.П. Сущенко

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК-1.1 Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам.

ИОПК-1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.

ИОПК-1.3 Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.

ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области.

ИОПК-3.2 Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.

ИОПК-3.3 Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Задача 1. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.

Задача 2. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.

Задача 3. По реализации выборки $X_1, \dots, X_n$ построить оценки методом максимального правдоподобия для параметров нормального распределения.

Задача 4. Доказать, что в пространстве $C[0,1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

Задача 5. Доказать, что в пространстве l_p при p неравном 2 нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

Задача 6. Доказать полноту пространства $L_2(a,b)$.

Задача 7. Найти норму функционала в виде интеграла в постоянных пределах от функции из $C(a,b)$.

Задача 8. Привести пример интегрирования по измеримым множествам.

Задача 9. Привести пример вычисления интеграла Стильтьеса.

Задача 10. Найти норму функционала $f(0)$ в $C(a,b)$.

Задача 11. Найти норму оператора $Ax(t)$ из $C(a,b)$ в $C(a,b)$.

Задача 12. В нормированном пространстве доказать неравенство треугольника.

Задача 13. Доказать неравенство Коши-Буняковского.

Задача 14. Доказать неравенство Минковского.

Вариант 1

1. В чем отличие функционального анализа от математического анализа. Некоторые задачи функционального анализа.
2. Определение меры. Сигма-аддитивность.
3. Определение метрического пространства.

Вариант 2

1. Определение вероятностного пространства;
2. Действия над измеримыми функциями. Эквивалентность.
3. Определение и примеры полных метрических пространств.

Вариант 3

1. Принцип сжимающих отображений.
2. Определение и примеры линейных пространств и определение линейных подпространств.
3. Определение и примеры линейных функционалов.

Вариант 4

1. Применения принципа сжимающих отображений..
2. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Привести формулировку теоремы Хана-Банаха..
3. Определение и примеры нормированных пространств.

Вариант 5

1. Определение и примеры евклидовых пространств.
2. Существование ортогональных базисов. Ортогонализация.
3. Теорема Рисса-Фишера..

Вариант 6

1. Гильбертово пространство. Определение. Примеры.
2. Однородно выпуклые функционалы. Функционал Минковского.
3. Сумма и произведение операторов. Обратный оператор.

Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Основой для оценки текущего контроля являются Критерии оценивания результатов обучения. Задания формулируются по билетам

Билет № 1

1. В чем отличие функционального анализа от математического анализа. Некоторые задачи функционального анализа.
2. Определение меры. Сигма-аддитивность.
3. Определение метрического пространства.
4. Определение вероятностного пространства;
5. Действия над измеримыми функциями. Эквивалентность.

Билет № 2

1. Определение и примеры полных метрических пространств.
2. Принцип сжимающих отображений.
3. Определение и примеры линейных пространств и определение линейных подпространств.
4. Определение и примеры линейных функционалов.
5. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Привести формулировку теоремы Хана-Банаха..

Билет № 3

1. Применения принципа сжимающих отображений..
2. Определение и примеры нормированных пространств.
3. Определение и примеры евклидовых пространств.
4. Существование ортогональных базисов. Ортогонализация.

5. Теорема Рисса-Фишера..

Билет № 4

1. Доказать неравенство Минковского.
- 2.. Применения принципа сжимающих отображений..
3. Определение и примеры линейных пространств и определение линейных подпространств.
4. Выпуклые множества и выпуклые функционалы.
5. Найти норму функционала $f(0)$ в $C(a,b)$.

Билет № 5

1. Доказать полноту пространства $L_2(a,b)$.
2. Найти норму функционала в виде интеграла в постоянных пределах от функции из $C(a,b)$.
3. Привести пример интегрирования по измеримым множествам.
4. Действия над измеримыми функциями. Эквивалентность.
5. Определение и примеры полных метрических пространств.

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все пять вопросов билета.

Оценка «Хорошо» - студент ответил правильно на четыре вопроса билета.

Оценка «Удовлетворительно» - студент ответил правильно на три вопроса билета

Оценка «Неудовлетворительно» – ответ студента на менее трех вопросов билета.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Экзаменационный билет № 1

1. Вероятностное пространство. Определение сигма-алгебры и вероятностной меры.
2. Определение и примеры метрических пространств.
3. Принцип сжимающих отображений.
4. Действия над измеримыми функциями. Эквивалентность.
5. Определение меры. Сигма-аддитивность.

Экзаменационный билет № 2

1. Определение и примеры полных метрических пространств.
2. Принцип сжимающих отображений.
3. Существование ортогональных базисов. Ортогонализация.
4. Определение и примеры евклидовых пространств.
5. Определение метрического пространства.

Экзаменационный билет № 3

1. Определение и примеры линейных функционалов.
2. Применения принципа сжимающих отображений..
3. Определение и примеры линейных пространств и определение линейных подпространств.
4. Выпуклые множества и выпуклые функционалы.
5. Построить оценку методом максимального правдоподобия для параметра закона Пуассона.

Экзаменационный билет № 4

1. Определение и примеры евклидовых пространств.

2. Доказать неравенство Коши-Буняковского.
3. Определение и примеры линейных функционалов.
4. Найти норму функционала $f(0)$ в $C(a,b)$.
5. Действия над измеримыми функциями. Эквивалентность.

Экзаменационный билет № 5

1. Однородно выпуклые функционалы. Функционал Минковского.
2. Определение и примеры операторов.
3. Определение и примеры нормированных пространств.
4. Найти норму функционала $f(0)$ в $C(a,b)$.
5. Доказать, что в пространстве $C[0,1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Основой для промежуточной аттестации являются Критерии оценивания результатов обучения. Задания берутся из экзаменационных билетов.

Оценка «Отлично» ставится, если студент ответил правильно на все пять вопросов экзаменационного билета.

Оценка «Хорошо» - студент ответил правильно на четыре вопроса экзаменационного билета.

Оценка «Удовлетворительно» - студент ответил правильно на три вопроса экзаменационного билета

Оценка «Неудовлетворительно» – ответ студента на менее трех вопросов экзаменационного билета.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Список вопросов для оценки остаточных знаний

1. Вероятностное пространство. Определение сигма-алгебры и вероятностной меры.
2. Определение и примеры метрических пространств.
3. Определение и примеры полных метрических пространств.
4. Принцип сжимающих отображений.
5. Определение и примеры линейных функционалов.
6. Применения принципа сжимающих отображений.

Информация о разработчиках

Васильев Вячеслав Артурович, д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедра системного анализа и математического моделирования, профессор