

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ:

Декан



Л. В. Гензе

« 31 » 06 20 22 г.

Рабочая программа дисциплины

Дифференциальные уравнения

по направлению подготовки

**01.03.01 Математика, 02.03.01, Математика и компьютерные науки,
01.03.03 Механика и математическое моделирование**

Направленность (профиль) подготовки:

**Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и
компьютерных наук**

**Основы научно-исследовательской деятельности в области механики и
математического моделирования**

Форма обучения

Очная

Квалификация

Бакалавр

Год приема

2022, 2023

Код дисциплины в учебном плане: Б1.О.2.07

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

Л. В. Гензе

Председатель УМК

Е. А. Тарасов

Томск – 2022

1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Задачи освоения дисциплины

– Освоить аппарат теории дифференциальных уравнений для приобретения навыков решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем - приобретения навыков качественного анализа дифференциальных уравнений и их систем.

– Научиться применять понятийный аппарат теории дифференциальных уравнений для приобретения навыков составления дифференциальных уравнений при решения конкретных прикладных задач.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к Блоку 1 «Дисциплина (модули)».

Дисциплина относится к обязательной части образовательной программы.

4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине

Третий семестр, зачет

Четвертый семестр, экзамен

5. Входные требования для освоения дисциплины

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: математический анализ (1,2 семестр), алгебра .

6. Язык реализации

Русский

7. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 з.е., 252 часов, из которых:

-лекции: 64 ч.

-практические занятия: 64 ч.

в том числе 124 часа составляет самостоятельная работа обучающегося.

Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

8. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Понятие дифференциального уравнения. Геометрическая интерпретация: расширенное фазовое пространство, поле направлений, интегральные кривые, изоклины. Элементарные методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка.

Тема 2. Общая теория уравнений.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем и уравнений произвольного порядка. Теорема о продолжении решений. Непрерывная зависимость решений от начальных значений, параметров. Дифференцируемость решения по параметру и начальным значениям. Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 3. Уравнения высших порядков.

Общий, промежуточный интеграл. Методы понижения порядка уравнения. Уравнения, допускающие решение в квадратурах.

Тема 4. Общая теория линейных систем и уравнений.

Определитель Вронского, формула Лиувилля – Остроградского. Метод вариации произвольных постоянных. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения со специальной правой частью.

Тема 5. Некоторые вопросы теории уравнений второго порядка.

Интегрирование уравнений с помощью степенных рядов. Уравнение Эйри, Бесселя. Механические колебания. Резонанс Нули решений, теоремы сравнения (Штурма). Понятие о краевых задачах.

Тема 6. Линейные системы с постоянными коэффициентами.

Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородной линейной системы в случае различных и кратных корней характеристического уравнения. Нахождение частных решений неоднородных систем. Симметрическая форма системы дифференциальных уравнений. Первые интегралы. Динамические уравнения Эйлера. Метод интегрируемых комбинаций.

Тема 7. Элементы теории устойчивости.

Критерий устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Функция Ляпунова: леммы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости, теорема Четаева о неустойчивости.

Тема 8. Фазовая плоскость.

Топология фазовых кривых. Классификация линейных особых точек на плоскости: узел, седло, фокус, центр.

Тема 9. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка.

Характеристики. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнение Пфаффа, условие полной интегрируемости.

9. Текущий контроль по дисциплине

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости, выполнения контрольных работ, тестов по лекционному материалу, коллоквиумов, своевременного выполнения индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр. Для активизации работы студентов в течение семестра и лучшего усвоения дисциплины предусмотрена балльно-рейтинговая система оценки успеваемости студентов.

10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

Зачет в третьем семестре проводится в письменной форме по билетам с учетом балльно-рейтинговой системы и текущего контроля по дисциплине. Билет содержит теоретический вопрос и две задачи.

Примерный перечень теоретических вопросов

1. Геометрическая интерпретация уравнения $y' = f(x, y)$. Поле направлений. Изоклины. Интегральные линии.
2. Уравнения с разделяющимися переменными
3. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным.

4. Линейные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных.
5. Уравнение Бернулли, Риккати.
6. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
7. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$. Метод последовательных приближений.
8. Непрерывная зависимость решения от начальных данных, параметров.
9. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
10. Особые решения уравнения $F(x, y, y') = 0$.
11. Интегрирование уравнения $F(x, y, y') = 0$. Общий метод введения параметра.
12. Уравнение Лагранжа, Клеро.
13. Уравнения высших порядков. Задача Коши. Методы понижения порядка уравнения. Уравнения, допускающие решение в квадратурах.

Примеры задач:

1. Решить задачу Коши $y' + \frac{2y}{x} = x^3$, $y(1) = -\frac{5}{6}$.
2. Решить задачу Коши $3y^2 \cdot y' + y^3 = x + 1$, $y(1) = 1$.
3. Решить задачу Коши $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$, $y(2) = 0$.

Результаты зачета определяются оценками «зачтено», «незачтено».

Экзамен в четвертом семестре проводится в письменной форме по билетам. Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов и задачи. Продолжительность экзамена 1,5 часа.

Основные вопросы для подготовки к экзамену по дисциплине "Дифференциальные уравнения"

1. Линейная зависимость функций. Определитель Вронского.
2. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля.
3. Теорема об общем решении однородного линейного уравнения.
4. Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами.
5. Теорема об общем решении неоднородного линейного уравнения. Метод Лагранжа нахождения частного решения.
6. Метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения неоднородного линейного уравнения со специальной правой частью.
7. Гармонические колебания. Вынужденные колебания. Резонанс.

8. Нули решений ЛОДУ второго порядка. Теорема сравнения (Штурма). Следствия.
9. Симметрическая форма системы дифференциальных уравнений. Первые интегралы. Метод интегрируемых комбинаций.
10. Линейные системы. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского.
11. Теорема о структуре общего решения однородной линейной системы.
12. Теорема о структуре общего решения неоднородной линейной системы. Метод вариации произвольных постоянных. Метод неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения.
13. Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами в случае различных и кратных корней характеристического уравнения.
14. Устойчивость, асимптотическая устойчивость решений систем ДУ.
15. Устойчивость положения равновесия линейной системы. Критерий асимптотической устойчивости линейной однородной системы. Условия Рауса-Гурвица.
16. Исследование устойчивости по первому приближению.
17. Метод функций Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.
18. Фазовая плоскость однородной линейной системы. Простейшие типы точек покоя: узел, седло, фокус, центр.
19. Уравнения с частными производными первого порядка. Основные понятия. Задача Коши.
20. Общее решение и решение задачи Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка.
21. Общее решение и решение задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка.

Пример экзаменационного билета:

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
Дифференциальные уравнения
Билет № 13

1. Геометрическая интерпретация уравнения $y' = f(x, y)$. Поле направлений. Изоклины. Интегральные линии.
2. Теорема о структуре общего решения неоднородной линейной системы. Метод вариации произвольных постоянных.

3. Найти общее решение системы
$$\begin{cases} x = 2x - 5y + \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = x - 4y \end{cases}$$

Зав. кафедрой математического анализа и теории функций

/С.П. Гулько/

Письменная часть экзамена максимально может быть оценена 5 баллами за каждый вопрос. Итоговая оценка суммируется из оценок за каждый вопрос и оценки за дополнительные вопросы по желанию преподавателя. При ответе на вопрос оценивается полнота и точность ответа, логичность и аргументированность изложения материала, умения использовать в ответе фактический материал.

Оценка	Критерии соответствия
5	Дан правильный и развернутый ответ на вопрос. Студент четко и логично изложил свой ответ на поставленный в билете вопрос.
4	Дан правильный ответ на вопрос, но не все изложено развернуто и логически структурировано.
3	В целом дан правильный ответ на вопрос, но он изложен поверхностно и с нарушением логики изложения.
2	Ответ представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения. Студент очень плохо владеет основными моделями и концепциями механики. Допущены существенные терминологические и фактические ошибки.
1	Дан неправильный ответ, однозначно неправильная трактовка темы.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Уровень освоения компетенций*	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
		2	3	4	5

<p>Первый этап (уровень) (ОПК-1) – I</p>	<p>3 (ОПК-1) – I Знать: основные понятия теории дифференциальных уравнений, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений У (ОПК-1) – Уметь: - решать задачи вычислительного и теоретического характера в области дифференциальных уравнений В (ОПК-1) — Владеть: математическим аппаратом дифференциальных уравнений, методами решения задач и доказательства утверждений в этой области.</p>	<p>Выставляется обучающемуся, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой практических заданий. Оценка "неудовлетворительно" ставится обучающимся, которые не могут продолжить обучение или приступить к профессиональной деятельности по окончании образовательного учреждения без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.</p>	<p>Заслуживает обучающийся, обнаруживший знания основного учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, справляющийся с выполнением практических заданий, предусмотренных программой, знакомых с основной литературой, рекомендованной программой. Оценка "удовлетворительно" выставляется обучающимся, допустившим погрешности в ответе на экзамене, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.</p>	<p>Заслуживает обучающийся, обнаруживший полное знание учебного материала, успешно выполняющий предусмотренные в программе практические задания, усвоивший основную литературу, рекомендованную в программе. Показавший систематический характер знаний по дисциплине и способный к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.</p>	<p>Заслуживает обучающийся, обнаруживший всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, умение свободно выполнять практические задания, предусмотренные программой, усвоивший основную литературу и знакомый с дополнительной литературой, рекомендованной программой.</p>
--	--	--	--	---	---

Оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» означают успешное прохождение промежуточной аттестации.

Оценка «отлично» соответствует продвинутому уровню сформированности компетенции.

Оценка «хорошо» соответствует базовому уровню сформированности компетенции.

Оценка «удовлетворительно» соответствует пороговому уровню сформированности компетенции.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если компетенция не сформирована.

11. Учебно-методическое обеспечение

а) Дифференциальные уравнения-I. Электронный ресурс, ч.1: учебно-методический комплекс: [для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям 01.03.01 «Математика», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», все профили подготовки], Соколов Б.В. Том. гос. ун-т., [Ин-т дистанционного образования]. Томск: [ИДО ТГУ], 2015. <http://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=1662>.

б) Дифференциальные уравнения- II. Электронный ресурс, ч.2: учебно-методический комплекс [для студентов высших учебных заведений, обучающихся по

направлениям 01.03.01 «Математика», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» , 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», все профили подготовки], Соколов Б.В. Том. гос. ун-т., [Ин-т дистанционного образования]. Томск: [ИДО ТГУ], 2015. <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=1291>

в) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

г) План семинарских / практических занятий по дисциплине.

1. Геометрическая интерпретация: расширенное фазовое пространство, поле направлений, интегральные кривые, изоклины.
2. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним. Однородные ДУ первого порядка и приводящиеся к ним. Задача Коши.
3. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли. Уравнения Риккати.
4. Уравнения в полных дифференциалах.
5. Интегрирующий множитель.
6. Метод последовательных приближений.
7. ДУ первого порядка, неразрешенные относительно производной. Параметрический метод.
8. Уравнения Лагранжа и Клеро. Особые решения.
9. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка.
10. Линейные уравнения с переменными коэффициентами, формула Лиувилля – Остроградского. Метод вариации произвольных постоянных. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.
11. Линейные ДУ с постоянными коэффициентами. Уравнения со специальной правой частью.
12. Системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Сведение системы ДУ к уравнению n -го порядка.
13. Нелинейные системы ДУ.
14. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость.
15. Фазовая плоскость. Классификация линейных особых точек на плоскости: узел, седло, фокус, центр.
16. Линейное и квазилинейное дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Решение задачи Коши.

д) Для выработки необходимых компетенций рекомендуются индивидуальные задания для студентов, такие как решение задач по теме дисциплины, подготовка докладов. Самостоятельная работа направлена на выработку навыка самостоятельного поиска информации, закрепление лекционного материала, развитие необходимых практических навыков, установление связей с различными разделами дисциплины. В течение семестра студенты разбирают и решают задачи, указанные преподавателем к каждому семинару, разбирают и повторяют основные понятия и теоремы, доказанные на лекциях, выполняют индивидуальные задания. В 3-м семестре предусмотрены 2 контрольные работы, коллоквиум и зачет, в 4-м семестре – 2 коллоквиума, 2 контрольные работы и экзамен.

12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ, 2011, 352 с.
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Физматлит, 2009, 207 с.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ЛКИ, 2016, 512 с.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.. Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями (учебное пособие для

студентов вузов). Москва: Ленанд, 2016, 253 с.

б) дополнительная литература:

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Учебник. Минск: «Вышэйшая школа», 1974, 768 с.
2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений (учебник для студентов вузов по группе физико-математических направлений и специальностей). Москва: УРСС, 2010, 238 с.
3. Матвеев Н.М. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учебное пособие. Санкт-Петербург: Лань, 2016, 431 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
5. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 1989, 408 с.

в) ресурсы сети Интернет:

1. Международный научно-образовательный сайт *EqWorld* содержит обширную информацию о различных классах обыкновенных дифференциальных уравнений <http://eqworld.ipmnet.ru/>
2. Образовательный математический сайт <http://exponenta.ru/>
3. Федеральный портал. Российское образование. <http://www.edu.ru>

13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook);
- публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

- Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ – <http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>
- Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ – <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>
- ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>
- ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>
- Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
- ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
- ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

14. Материально-техническое обеспечение

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения занятий семинарского типа, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешанном формате («Акту»).

15. Информация о разработчиках

Соколов Б. В., к.ф.-м.н., ст.н.с., доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ