

МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ

Директор института прикладной
математики и компьютерных наук

А.В. Замятин

2022 г.



Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине
(Оценочные средства по дисциплине)

Математический анализ

по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки:

Математические методы в цифровой экономике

ОС составила:

канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры прикладной математики



И.Ю. Гендрина

Рецензент:

д-р физ.-мат. наук, доцент,
профессор кафедры теории вероятностей и
математической статистики



С.В. Рожкова

Оценочные средства одобрены на заседании учебно-методической комиссии
института прикладной математики и компьютерных наук (УМК ИПМКН).

Протокол от 12 мая 2022 г. № 04.

Председатель УМК ИПМКН,
д-р техн. наук, профессор



С.П. Сущенко

Оценочные средства (ОС) являются элементом системы оценивания сформированности компетенций у обучающихся в целом или на определенном этапе ее формирования.

ОС разрабатывается в соответствии с рабочей программой (РП) дисциплины.

1. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины

| Компетенция | Индикатор компетенции | Код и наименование результатов обучения (планируемые результаты обучения, характеризующие этапы формирования компетенций) | Критерии оценивания результатов обучения | | | |
|--|--|--|---|---|---|--|
| | | | Отлично | Хорошо | Удовлетворительно | Неудовлетворительно |
| ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки работы с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам. | ОР-1.1.1 Обучающийся сможет работать с учебной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам. | Свободно владеет литературой из основного и дополнительного списков. | Хорошо работает с источниками из основного и дополнительного списков предложенной литературы. | Работает с некоторыми источниками из основного списка литературы | Не ориентируется в предложенных списках литературы. |
| | | ОР-1.1.2 Обучающийся сможет подбирать и обрабатывать информацию относительно выбранной темы исследования. | Проявляет самостоятельность в выборе источников. Свободно подбирает и обрабатывает информацию относительно выбранной темы исследования. | Уверенно подбирает и обрабатывает информацию относительно выбранной темы исследования. | Затрудняется с подбором и обработкой информации относительно выбранной темы исследования. | Не умеет подбирать и обрабатывать информацию относительно выбранной темы исследования. |

| | | | | | | |
|--|---|---|---|--|---|---|
| | | <p>ОР-1.1.3 Обучающийся сможет правильно цитировать и делать ссылки на используемые источники в письменных работах.</p> | <p>Правильно цитирует и делает ссылки на используемые источники</p> | <p>В основном правильно цитирует и делает ссылки на используемые источники</p> | <p>Испытывает затруднения при оформлении цитирования и выполнения ссылок на используемые источники.</p> | <p>Не умеет цитировать и делать ссылки на используемые источники</p> |
| | <p>ИОПК-1.2. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.</p> | <p>ОР-1.2 Обучающийся сможет выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, формируемых в рамках математического анализа.</p> | <p>Свободно выполняет стандартные действия при решении типовых задач, свободно владеет основными понятиями и закономерностями курса математического анализа</p> | <p>Хорошо выполняет стандартные действия при решении большинства типовых задач, владеет основными понятиями и закономерностями курса математического анализа</p> | <p>Выполняет стандартные действия при решении некоторых типовых задач, владеет некоторыми основными понятиями и закономерностями курса математического анализа</p> | <p>Не выполняет стандартные действия при решении типовых задач, не владеет основными понятиями и закономерностями курса математического анализа</p> |
| | <p>ИОПК-1.3. Демонстрирует навыки использования основных понятий, фактов, концепций, принципов математики, информатики и естественных наук для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.</p> | <p>ОР-1.3 Обучающийся сможет использовать основные понятия, факты, концепции, принципы математического анализа для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой.</p> | <p>Свободно и осознанно использует основные понятия, факты, концепции, принципы математического анализа для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой</p> | <p>Уверенно использует основные понятия, большинство фактов, концепций и принципов математического анализа для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой</p> | <p>Использует основные понятия, некоторые факты и концепции математического анализа для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой</p> | <p>Не умеет использовать основные понятия, факты, концепции, принципы математического анализа для решения практических задач, связанных с прикладной математикой и информатикой</p> |

| | | | | | | |
|---|--|--|---|--|--|---|
| | ИОПК-1.4. Демонстрирует понимание и навыки применения на практике математических моделей и компьютерных технологий для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности. | ОР-1.4 Обучающийся сможет понимать и применять на практике модели математического анализа для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности. | Уверенно понимает и применяет на практике модели математического анализа для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности. | Хорошо понимает и применяет на практике основные модели математического анализа для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности. | Понимает и применяет на практике некоторые модели математического анализа для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности. | Не понимает и не способен применить на практике модели математического анализа для решения практических задач, возникающих в профессиональной деятельности. |
| ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности. | ИОПК-3.1. Демонстрирует навыки применения современного математического аппарата для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области. | ОР-3.1 Обучающийся сможет применять современный математический аппарат для построения адекватных математических моделей реальных процессов, объектов и систем в своей предметной области. | Свободно и осознанно применяет аппарат математического анализа для построения соответствующих моделей реальных процессов, объектов и систем. | Хорошо применяет основные элементы аппарата математического анализа для построения соответствующих моделей реальных процессов, объектов и систем. | Применяет некоторые элементы аппарата математического анализа для построения соответствующих моделей реальных процессов, объектов и систем. | Не умеет применять известные элементы аппарата математического анализа для построения соответствующих моделей реальных процессов, объектов и систем. |

| | | | | | | |
|--|---|--|--|--|---|--|
| | <p>ИОПК-3.2. Демонстрирует умение собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.</p> | <p>ОР-3.2 Обучающийся сможет собирать и обрабатывать статистические, экспериментальные, теоретические и т.п. данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов.</p> | <p>Уверенно умеет собирать и обрабатывать данные для использования аппарата математического анализа с целью построения моделей, проведения расчетов и конкретных практических выводов.</p> | <p>Умеет обрабатывать имеющиеся данные для использования аппарата математического анализа с целью построения моделей, проведения расчетов и конкретных практических выводов.</p> | <p>Умеет обрабатывать имеющиеся данные для использования аппарата математического анализа с целью построения некоторых моделей.</p> | <p>Не умеет собирать и обрабатывать данные для использования аппарата математического анализа с целью построения моделей, проведения расчетов и конкретных практических выводов.</p> |
| | <p>ИОПК-3.3. Демонстрирует способность критически переосмысливать накопленный опыт, модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.</p> | <p>ОР-3.3.1 Обучающийся сможет критически переосмысливать накопленный опыт.</p> | <p>Уверенно и обоснованно распознает достоинства и недостатки существующей математической модели.</p> | <p>Распознает основные достоинства и недостатки существующей математической модели.</p> | <p>Распознает некоторые достоинства и недостатки существующей математической модели.</p> | <p>Не умеет критически оценивать существующую математическую модель.</p> |
| | | <p>ОР-3.3.2 Обучающийся сможет модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.</p> | <p>Способен обоснованно модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемой математической модели.</p> | <p>Способен обоснованно модифицировать при необходимости вид и характер основных математических моделей.</p> | <p>Способен обоснованно модифицировать при необходимости вид и характер некоторых математических моделей.</p> | <p>Не умеет модифицировать при необходимости вид и характер разрабатываемых математических моделей.</p> |

| | | | | | | |
|--|---|--|--|---|---|--|
| | ИОПК-3.4. Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности. | ОР-3.4.1 Обучающийся сможет классифицировать с математической точки зрения задачи, поставленные в области профессиональной деятельности. | Свободно и обоснованно классифицирует поставленные задачи с математической точки зрения. | Уверенно классифицирует стандартные задачи с математической точки зрения. | Классифицирует некоторые стандартные задачи с математической точки зрения. | Не умеет классифицировать с математической точки зрения задачи, поставленные в области профессиональной деятельности. |
| | | ОР-3.4.2 Обучающийся сможет применять на практике соответствующие модели математического анализа для решения различных задач в области профессиональной деятельности. | Уверенно и обоснованно применяет соответствующие модели математического анализа для решения различных задач в области профессиональной деятельности. | Обоснованно применяет соответствующие модели математического анализа для решения стандартных задач в области профессиональной деятельности. | Применяет соответствующие модели математического анализа для решения некоторых стандартных задач в области профессиональной деятельности. | Не умеет применять на практике соответствующие модели математического анализа для решения различных задач в области профессиональной деятельности. |

2. Этапы формирования компетенций и виды оценочных средств

| № | Этапы формирования компетенций (разделы дисциплины) | Код и наименование результатов обучения | Вид оценочного средства (тесты, задания, кейсы, вопросы и др.) |
|-----|--|--|---|
| 1. | Теория вещественных чисел | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР-1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2. | Домашние работы, контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |
| 2. | Предел, непрерывность | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР-1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2 | Домашние работы, контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |
| 3. | Производная и ее применение | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР-1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2 | Домашние работы, контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |
| 4. | Неопределенный интеграл | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР-1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2 | Домашние работы, контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |
| 5. | Определенный интеграл | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР-1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2 | Домашние работы, контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |
| 6. | Несобственные интегралы | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР-1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2 | Домашние работы, контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |
| 7. | Функции многих переменных | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР-1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2 | Домашние работы, контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |
| 8. | Числовые ряды | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР-1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.3, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.1, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2 | Домашние работы, контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |
| 9. | Криволинейные интегралы | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР-1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.3, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.1, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2 | Домашние работы, контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |
| 10. | Функциональные и степенные ряды | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР-1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.3, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.1, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2 | Домашние работы, контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |
| 11. | Интегралы с параметром | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР- | Домашние работы, |

| | | | |
|-----|-----------------------------------|--|---|
| | | 1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.3, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.1, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2 | контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |
| 12. | Кратные и поверхностные интегралы | ОР-1.1.1, ОР-1.1.2, ОР-1.1.3, ОР-1.2, ОР-1.3, ОР-1.4, ОР-3.2, ОР-3.1, ОР-3.4.1, ОР-3.4.2 | Домашние работы, контрольные работы, коллоквиумы, выступление с докладом. |

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки образовательных результатов обучения

3.1. Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Контрольная работа №1 (первый семестр)

1. Доказать по ММИ:

$$2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n(2n^2 + 9n + 1)}{6}.$$

2. С помощью биннома Ньютона получить

разложение:

$$\left(2x - \frac{y}{3}\right)^5.$$

3. Доказать по определению, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3}{n^2 + 2} = 4.$$

4. Вычислить:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n}.$$

5. Доказать, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty$ по ТПМОП, если

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{7^n}\right).$$

6. Доказать $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty$ по критерию Б-К, если

$$x_n = \frac{\cos(1)}{1!} + \frac{\cos(2)}{2!} + \dots + \frac{\cos(n)}{n!}.$$

Контрольная работа №2 (первый семестр)

1. Записать на языке $\varepsilon - \delta$: $f(x) \rightarrow b - 0$ при $x \rightarrow a + 0$.
2. Доказать по определению:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-2)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 + x - 6} = 0$$

3. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 - 1}{\sqrt{x^{12} + 5x^5 - 1}}$.

4. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) - 1}{\operatorname{tg}^2 x}$.

5. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \sin x}{\ln(1+x)}$.

6. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$.

7. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}$.

8. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(2-x) + \sin(x-2)^2}{x^2 - 4}$.

Контрольная работа №1 (второй семестр)

1. Найти y'_x и y''_{x^2} : $x(t) = \frac{e^t}{1+t}$, $y(t) = (t-1)e^t$.
2. Найти dy и $d^2 y$: $y = u \ln v$, если $u = u(x)$, $v = v(x)$.
3. Найти $d^8 y$: $y = (2x^2 + 1) \operatorname{sh}^2 x$.
4. Вычислить, используя стандартные разложения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - \ln(1+x^2)}{x^3 + \sqrt{1+3x^3} - 1}$$

5. Разложить по формуле Маклорена: $y(x) = x^3\sqrt{4-4x}$.

6. Построить график функции: $r = \cos 3\varphi$.

7. Записать число в тригонометрической форме: $z = (2 - \sqrt{3}i)^{60}$.

8. Найти все корни и записать в показательной форме:

$$z^6 = \sqrt{2} + 2i.$$

9. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

$$3 < |z - 3 + 4i| \leq 5.$$

Контрольная работа №2 (второй семестр)

Вычислить интегралы.

1.

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

2.

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$$

3.

$$\int e^{3x} \cos 5x dx$$

4.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{6 - 7x^3 + 2x^6}}$$

5.

$$\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 8} dx$$

6.

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

7.

$$\int \frac{x - \sqrt{2x^2 + 3x + 5}}{\sqrt{4x^2 + 6x + 10}} dx$$

8.

$$\int \frac{dx}{(2 - \sin x) \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}$$

9.

$$\int \sin x \cos 3x dx$$

Контрольная работа №3 (второй семестр)

1. Найти площадь плоской фигуры:

$$y^2 = 2px; x^2 + y^2 = R^2 .$$

2. Вычислить длину дуги:

$$x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right); y = a \sin t; 0 < t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} .$$

3. Найти объем тела вращения вокруг OY :

$$y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2; y = b \left| \frac{x}{a} \right|; a > 0; b > 0 .$$

4. Найти площадь поверхности вращения кривой вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Контрольная работа №4 (второй семестр)

1. Вычислите по определению:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 15} dx$$

2. Исследуйте на сходимость:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x \cdot \sqrt[3]{x} + 15} dx$$

3. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость:

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt{x})^p \cdot \sin(x^5) dx$$

Контрольная работа №1 (третий семестр)

1. Исследовать сходимость ряда по определению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}} \right)$$

2. Доказать расходимость ряда, используя необходимое условие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^n$$

3. Исследовать сходимость ряда, используя признаки сравнения:

$$a_n = \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$$

4. Исследовать сходимость ряда по признаку Даламбера или Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} (2n)!}{5^{2n} (n!)^4}$$

5. Исследовать сходимость ряда по признаку Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right)^2 \frac{1}{n^3}$$

6. Исследовать сходимость ряда по признаку Гаусса:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)n^\alpha}, \quad \beta > 0$$

7. Исследовать сходимость по признаку Коши-Маклорена:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^n}}$$

8. Доказать расходимость по критерию Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+5}$$

9. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+(-1)^n)^\alpha}$$

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Контрольная работа №2 (третий семестр)

1. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!}{(2n)!} \right]^p \left(\frac{x}{2} \right)^n$.

2. Разложить функцию в ряд по степеням $1-x$: $f(x) = \frac{1}{6-5x+x^2}$.

3. Используя предварительное дифференцирование, разложить функцию в ряд по степеням x :

$$f(x) = x \cdot \arcsin x + x \cdot \operatorname{arctg} x$$

4. Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$.

Контрольная работа №3 (третий семестр)

1.

а) Найти производную: $\int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx$.

б) Вычислить, используя дифференцирование или интегрирование по параметру:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^2 dx.$$

2. Выразить через эйлеровы интегралы, указав область существования: $\int_0^{+\infty} x^p e^{-\alpha x^2} dx$.

3. Разложить в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ по косинусам нечетных дуг: $f(x) = \frac{x}{2}(x + \pi)$.

3.2. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Вопросы к экзамену (первый семестр)

1. Мощность множества. Счетные и континуальные множества.
2. Рациональные и вещественные числа.
3. Точные грани числовых множеств
4. Предел последовательности и его свойства.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Предельный переход в неравенствах.
6. Предел монотонной последовательности. Лемма о вложенных отрезках. Бином Ньютона. Число «е» как предел последовательности.
7. Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы последовательности.

8. Предел функции и его свойства. Замечательные пределы. Признаки существования предела функции. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых функций.
9. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва функции. Теоремы о непрерывных функциях.
10. Равномерная непрерывность функции. Обратная функция.
11. Непрерывность элементарных функций.
12. Определение и геометрический смысл производной.
13. Таблица производных.
14. Теоремы о функциях, имеющих производную.
15. Производные высших порядков и их свойства.
16. Дифференциал и дифференцируемость функции.
17. Дифференциалы высших порядков.
18. Дифференциалы сложных функций.
19. Формула Тейлора.
20. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.
21. Исследование функции на монотонность и экстремум.
22. Выпуклость и точки перегиба графика функции.
23. Асимптоты графика функции.

Задачи к экзамену (первый семестр)

1. Доказать по определению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1.$$

2. Вычислить:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n - n^3}{(3n + 1)^3}.$$

3. Показать существование предела по теореме о монотонной и ограниченной последовательности:

$$x_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

4. Доказать сходимость по критерию Коши:

$$x_n = \frac{\sin(1 \cdot 2)}{1 \cdot 2} + \frac{\sin(2 \cdot 3)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin(n \cdot (n+1))}{n(n+1)}$$

5. Найти область определения функции:

$$y = \sqrt[8]{\frac{7}{x}} - 1 + \ln(x^2 - 4x + 3)$$

6. Доказать по определению и изобразить графически с « $\varepsilon - \delta$ » окрестностями:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (6 - 3x) = 3$$

7. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(5x^2 + x - 4)(x - 2)}{x^2 + x}$$

8. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^3 + 5} - \sqrt{4x^3})$$

9. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1 + x)}$$

10. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4 + 7}{3x^4} \right)^{4x^4}$$

11. Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sin \left(2x^3 + \frac{\pi}{2} \right) \right)}{\ln \left(\sin \left(3x^3 + \frac{\pi}{2} \right) \right)}$$

12. Доказать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$\sqrt[3]{2x + \sqrt{3x + \sqrt{4x}}} = O(\sqrt[3]{x})$$

13. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва, установить их характер:

$$y = \frac{6}{1 - 3^{\frac{x}{7-x}}}$$

14. Найти y' производную функции, заданной явно:

$$y = \frac{\ln^6(\sin(5x))}{\sqrt[3]{4 - 7x - x^2}}$$

15. Найти y' производную функции, заданной неявно:

$$e^{\sin y} \cdot (x^4 + y^5) = 7 \cos x$$

16. Найти дифференциал функции:

$$y = \frac{5^{\cos^3 x}}{\operatorname{arccotg}(7x)}$$

17. Найти dy дифференциал функции, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции:

$$y = \sqrt{(u^5 \cdot v^3)}$$

18. Вычислить пределы функций с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{\ln(x-2)} - \frac{1}{x^2-9} \right)$$

19. Найти все корни и записать в показательной форме:

$$z^4 = -3 + \sqrt{3}i.$$

20. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

$$5 < |4 - z + \sqrt{5}i| < 7.$$

21. Доказать по определению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

Вопросы к экзамену (второй семестр).

1. Первообразная и неопределенный интеграл.
2. Таблица интегралов и основные методы интегрирования.
3. Интегрирование рациональных дробей, иррациональных и тригонометрических функций.
4. Интегральная сумма и определенный интеграл.
5. Суммы Дарбу и признак существования определенного интеграла.
6. Свойства интегрируемых функций и определенного интеграла.
7. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Определенный интеграл как функция верхнего предела интегрирования и теоремы о среднем.
9. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление длин дуг плоских кривых, площадей плоских фигур, объемов, площадей поверхностей вращения.

10. Определение и свойства несобственного интеграла 1 рода.
11. Признаки сходимости несобственных интегралов 1 рода. Лемма Бореля.
12. Особые точки функции и определение несобственного интеграла 2 рода.
13. Главные значения несобственных интегралов.
14. Интегралы Фруллани.
15. Основные определения. Предел и непрерывность функции многих переменных.
16. Двойные и повторные пределы.
17. Производные и дифференциал функции многих переменных.
18. Неявные функции одной и многих переменных: существование и дифференцируемость
19. Система неявных функций.
20. Производные и дифференциалы высших порядков.
21. Формула Тейлора.
22. Экстремум функции многих переменных.
23. Метод неопределенных множителей Лагранжа решения задачи на условный экстремум функции многих переменных.

Задачи к экзамену (второй семестр).

1. Вычислить:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{x^4 - 4}} x dx$$

2. Вычислить:

$$\int x^2 \arccos 2x dx$$

3. Вычислить:

$$\int \sin 5x \operatorname{ch} 2x dx$$

4. Вычислить:

$$\int \frac{(x - 3) dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}}$$

5. Вычислить:

$$\int \frac{3x^2 - x + 1}{(x^2 - 9)(x^2 + 9)} dx$$

6. Вычислить:

$$\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{2 - 3x + x^2}}$$

7. Вычислить:

$$\int (5 - 2x^2)^{\frac{2}{3}} x^3 dx$$

8. Вычислить:

$$\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x}$$

9. Вычислить:

$$\int \operatorname{ctg} x dx$$

10. Найти площадь плоской фигуры:

$$y = |x - 1|; y = 3 - |x|$$

11. Найти площадь плоской фигуры:

$$r = 2 + \cos \phi$$

12. Вычислить длину дуги:

$$x = \sin^3 t; y = \cos^3 t; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

13. Вычислите по определению:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 15} dx$$

14. Исследуйте на сходимость:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x \cdot \sqrt[3]{x} + 15} dx$$

15. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость:

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt{x})^p \cdot \sin(x^5) dx$$

Вопросы к экзамену (третий семестр).

1. Основные определения.
2. Свойства рядов.
3. Признаки сходимости рядов.
4. Сочетательное свойство сходящихся рядов.
5. Переместительное свойство рядов и теорема Римана.
6. Умножение рядов.
7. Определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.
8. Признаки равномерной сходимости рядов.
9. Свойства равномерно сходящихся рядов.
10. Степенные ряды и радиус их сходимости.
11. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

12. Действия со степенными рядами.
13. Определение и вычисление криволинейных интегралов 1 и 2 рода.
14. Критерий независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути.
15. Интегралы по простым контурам.
16. Двойные интегралы: определение, свойства, вычисление.
17. Замена переменных в двойном интеграле.
18. Площадь поверхности.
19. Поверхностные интегралы 1 и 2 рода.
20. Тройные интегралы: определение и вычисление.
21. Интегралы, зависящие от параметра: основные определения.
22. Предельный переход под знаком интеграла, зависящего от параметра.
23. Дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла, зависящего от параметра.
24. Несобственные интегралы, зависящие от параметра и признаки из сходимости.
25. Эйлеровы интегралы.

Задачи к экзамену (третий семестр).

1. Исследовать сходимость ряда по определению: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

2. Доказать расходимость ряда, используя необходимое условие: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$.

3. Исследовать сходимость ряда, определив порядок убывания a_n : $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$.

4. Исследовать сходимость ряда по одному из признаков Даламбера, Коши, Раабе,

Гаусса: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{(\ln(n+1))^{n/2}}$.

5. Исследовать сходимость ряда по интегральному признаку: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+5}{n}$.

6. Доказать расходимость ряда по критерию Больцано-Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

7. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\sqrt{n} + \sin n)}$$

8. Определить область абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!}{(2n)!} \right]^2 \left[\frac{1-x}{1+x} \right]^n.$$

9. Исследовать характер сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x-1}{x^n}, \quad x \in [2, +\infty).$$

10. Доказать равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \cdot \sin^2 \frac{1}{nx}}{4 + \ln^2 nx}, \quad x \geq 2.$$

11. Доказать равномерную сходимость по признаку Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3nx \cdot \frac{e^{-nx}}{n}, \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

12. Определить область абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left[\frac{1-x}{1+x} \right]^n.$$

13. Разложить функцию в ряд по степеням x , определить радиус и интервал сходимости:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}.$$

14. Убедиться в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и вычислить интеграл:

$$\int_{(1,1)}^{(3,3)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

вдоль путей, не проходящих через начало координат.

15. Расставить в различном порядке пределы интегрирования в двойном интеграле по области Ω :

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов обучения

4.1. Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

В рамках текущего контроля оцениваются: посещаемость, выполнение домашних работ, выполнение контрольных работ, выступление с докладами. Оценивание производится по пятибалльной шкале.

Посещение.

| | | | |
|------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| отлично | хорошо | удовлетворительно | неудовлетворительно |
| 90%-100% занятий | 75% - 89,9% занятий | 65% - 74,9% занятий | Менее 65 % занятий |

Домашние работы.

| | | | |
|---------------------------|---------------------------|----------------------------|-------------------------|
| отлично | хорошо | удовлетворительно | неудовлетворительно |
| Опоздание не более 5 дней | Опоздание от 6 до 16 дней | Опоздание от 17 до 30 дней | Опоздание более 30 дней |

Контрольные работы.

Каждое задание оценивается по пятибалльной шкале, оценка за контрольную выставляется как среднее арифметическое.

| | | | |
|---------------------------------------|---|--|--|
| отлично | хорошо | удовлетворительно | неудовлетворительно |
| Приведено полное обоснованное решение | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. | Решение не соответствует задаче или отсутствует. |

Коллоквиумы.

| | | | |
|--|--|--|---|
| отлично | хорошо | удовлетворительно | неудовлетворительно |
| Ответ на вопрос выполнен без недочетов.. | Ответ на вопрос присутствует, но имеются принципиальные неточности в рассуждениях. | Ответ на вопрос присутствует, но допущены принципиальные ошибки. | Ответ не соответствует вопросу или отсутствует. |

Выступление с докладом повышает среднюю арифметическую оценку за семестр на 0,5 балла.

4.2. Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Промежуточная аттестация в виде зачета оценивается следующим образом.

Выставляется оценка за каждое задание в самостоятельной работе в соответствии с таблицей:

| | | | |
|------------------|------------------|----------------------|---------------------|
| отлично | хорошо | удовлетворительно | неудовлетворительно |
| Приведено полное | Решение содержит | Задача не решена, но | Решение не |

| | | | |
|----------------------|--|---|---------------------------------------|
| обоснованное решение | незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. | приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. | соответствует задаче или отсутствует. |
|----------------------|--|---|---------------------------------------|

Полученная оценка усредняется с оценками текущего контроля. Тем самым в процессе формирования итоговой оценки учитываются оценки за приобретаемые компетенции.

Оценка «зачтено» выставляется, если итоговый результат оказывается не ниже 2,5. В противном случае выставляется «незачтено».

Промежуточная аттестация в виде экзамена оценивается следующим образом.

Каждый вопрос билета, кроме последнего, оценивается в соответствии с таблицей:

| отлично | хорошо | удовлетворительно | неудовлетворительно |
|--|--|--|---|
| Ответ на вопрос выполнен без недочетов.. | Ответ на вопрос присутствует, но имеются непринципиальные неточности в рассуждениях. | Ответ на вопрос присутствует, но допущены принципиальные ошибки. | Ответ не соответствует вопросу или отсутствует. |

Если в рамках текущего контроля сданы коллоквиумы с оценками не ниже «удовлетворительно», то эти оценки могут быть использованы по желанию обучающегося в качестве оценок за соответствующие вопросы.

Последний вопрос билета оценивается в соответствии с таблицей:

| отлично | хорошо | удовлетворительно | неудовлетворительно |
|---------------------------------------|---|--|--|
| Приведено полное обоснованное решение | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. | Решение не соответствует задаче или отсутствует. |

К полученным оценкам добавляется усредненная оценка текущего контроля, тем самым в процессе формирования итоговой оценки учитываются оценки за приобретаемые компетенции. Итоговая оценка является результатом усреднения всех используемых

оценок, округленным по правилам округления. Если итог составляет 2,5; 3,5 или 4,5, то округление производится в пользу обучающегося – в большую сторону.