Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Дополнительные главы топологии

по направлению подготовки

01.03.01 Математика
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) подготовки
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики и компьютерных наук

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-4 Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности.

ПК-1 Способен проводить научно-исследовательские разработки по отдельным разделам выбранной темы.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 4.1 Проводит поиск и обработку научной и научно-технической информации, необходимой для решения исследовательских задач

ИОПК 4.2 Оценивает полученные результаты и формулирует выводы по итогам проведенных исследований

ИПК 1.1 Проводит работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований

ИПК 1.2 Подготавливает планы и программы проведения отдельных этапов научно-исследовательской работы

ИПК 1.3 Проводит отдельные этапы научно-исследовательской работы

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости и выполнения домашних заданий и фиксируется в форме контрольной точки не менее одного раза в семестр. Домашние задания состоят: (а) в самостоятельном доказательстве следствий из доказанных на лекциях теорем; (б) в самостоятельной проработке доказательств тех теорем, чьи доказательства были изложены схематично.

Элементы текущего контроля:

Контрольная работа № 1 (ИПК 1.1 и ИПК 1.3)

1) найдите $\aleph_0^{\aleph_0}$;
2) найдите $\aleph_0^{c}$;
3) найдите $c^{\aleph_0}$;
4) найдите c^{c}.

Ответы: 1) $2^{\aleph_0}$, 2) 2^{c}, 3) c, 4) 2^{c}.

Критерии оценивания: результаты контрольной работы № 1 определяются оценками «зачтено», «незачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если даны правильные ответы на 3 и более вопроса. Оценка «незачтено» выставляется, если даны правильные ответы не более, чем на 2 вопроса.

Контрольная работа № 2 (ИПК 1.1 и ИПК 1.3)

1) приведите пример непрерывной биекции, которая не является гомеоморфизмом;
2) приведите пример замкнутого отображения, которое не является непрерывным;
3) приведите пример разрывной биекции, обратное отображение для которой является непрерывным.

Ответы: 1) $f: [0, 2\pi) \to S^1$, $f(x) = (\sin x, \cos x)$; 2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$; 3) f^{-1}, где f из первого вопроса.

Критерии оценивания: результаты контрольной работы № 2 определяются оценками «зачтено», «незачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если даны правильные ответы на 2 и более вопроса. Оценка «незачтено» выставляется, если даны правильные ответы не более, чем на 1 вопрос.

Контрольная работа № 3 (ИПК 1.1 и ИПК 1.3)

1) докажите, что стрелка Зоргенфрея является тихоновским пространством;
2) докажите, что $\mathbb{R}^2$ является тихоновским пространством;
3) докажите, что бесконечное множество с коконечной топологией является нехаусдорфовым T_1-пространством;
4) докажите, что метрическое пространство является T_2-пространством.

Критерии оценивания: результаты контрольной работы № 3 определяются оценками «зачтено», «незачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если даны правильные ответы на 3 и более вопроса. Оценка «незачтено» выставляется, если даны правильные ответы не более, чем на 2 вопроса.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет в восьмом семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит теоретический вопрос, на который надо дать ответ в развернутой форме, включая доказательства всех утверждений (проверяются ИОПК-4.1, ИОПК-4.2) и две задачи, которые надо решить (проверяются ИПК-1.1, ИПК-1.2 и ИПК-1.3). Продолжительность зачета 1,5 часа.

Перечень теоретических вопросов:

1. Базы и предбазы. Примеры. Теорема о выделении из любого семейства открытых множеств пространства X подсемейства мощности $w(X)$ с таким же объединением. Применение этой теоремы в теории топологических пространств.
2. Базы и предбазы. Примеры. Теорема о выделении из любой базы пространства X базы мощности $w(X)$. Применение этой теоремы в теории топологических пространств.
3. Непрерывные отображения топологических пространств. Критерии непрерывности. Открытые и замкнутые отображения. Свойства топологических пространств, сохраняемых этими классами отображений.
4. Топология, порождённая семейством отображений. Классические примеры применения такого подхода к определению топологии.
5. Теорема Хьюитта-Марчевского-Пондицери. Сохранение свойств топологических пространств операцией произведения.
6. Диагональ отображений. Теорема об универсальности тихоновского куба веса m для всех тихоновских пространств веса m. Универсальные пространства для других классов топологических пространств.
7. Компактификации. Теорема о существовании максимальной компактификации.
8. Теорема о мощности и весе пространства βN.
9. Теорема о продолжении любого непрерывного отображения в компакт на расширение Чеха-Стоуна.
10. Фильтры, ультрафильтры и их применение в общей топологии.

11. Усиление аксиом отделимости свойствами, близкими к компактности.

12. Полнота в метрических пространствах и ее аналоги для классов топологических пространств. Теорема Бэра о категории.

Примеры задач:

1. Приведите пример непрерывного отображения $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которое
а) открыто-замкнуто;
б) открыто, но не замкнуто;
в) замкнуто, но не открыто;
г) не замкнуто и не открыто.

3. Покажите, что конечное T_1-пространство дискретно. Убедитесь, что в T_1-пространствах множество A^d (множество всех предельных точек множества A) обладает следующими свойствами: $(A^d)^d \subset A^d$; $A^d = \emptyset$, если A конечно.

4. Определите функцию $f: D(\mathfrak{c}) \to [0;1]$, которую нельзя непрерывно продолжить на компактификацию $A(\mathfrak{c}) \oplus A(\mathfrak{c})$ пространства $D(\mathfrak{c})$.

5. Покажите, что если любое открытое подпространство линделёфова пространства X само линделёфово, то пространство X наследственно линделёфово.

6. Приведите пример таких топологических пространств X, Y и Z что $\chi(X) < nw(X)$, $\chi(Y) = nw(Y)$ и $\chi(Z) > nw(Z)$.

7. Установите, что прямую Зоргенфрея можно непрерывно отобразить на счетное дискретное пространство, но нельзя непрерывно отобразить на несчетное дискретное пространство.

8. Докажите, что регулярность инвариантна относительно открыто-замкнутых отображений.

9. Докажите, что X – хаусдорфово пространство тогда и только тогда, когда диагональ Δ произведения $X \times X$ замкнута в $X \times X$.

10. Докажите, что если (X, τ_1) есть T_i-пространство с $i = 0,1,2$ и τ_2 - такая топология на X, что $\tau_1 \subset \tau_2$, то (X, τ_2) тоже является T_i-пространством. Покажите, что при $i \geq 3$ это неверно.

11. Пусть X – топологическое пространство. Непрерывное отображение $f: X \to X$ называется *ретракцией*, если $f \circ f = f$. Множество $f(X)$ в этом случае называется *ретрактом* пространства X. Докажите, что непрерывное отображение $f: X \to X$ является ретракцией если и только если $f(x) = x$ для всех $x \in f(X)$.

а) Докажите, что для произвольного подпространства M топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

(1) M – ретракт пространства X;

(2) любое непрерывное отображение $f: M \to Y$ в произвольное топологическое пространство Y продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f}: X \to Y$.

б) Докажите, что если X – хаусдорфово пространство, то всякий ретракт пространства X замкнут в X.

12. Определите функцию $f: D(\mathfrak{c}) \to [0;1]$, которую нельзя непрерывно продолжить на компактификацию «Двойная окружность Александрова» пространства $D(\mathfrak{c})$.

13. Пусть X – произвольное непустое множество и $\rho: X \times X \to [0; +\infty)$ – отображение, заданное формулой $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq y; \\ 0, x = y. \end{cases}$ Проверьте, что ρ – это метрика на множестве X и найдите, вес, характер и плотность получившегося топологического пространства.

Результаты зачета определяются оценками «зачтено», «незачтено».

Оценка	Критерии соответствия
зачтено	Ставится при выполнении не менее трех из следующих четырех условий: 1) выполнено не менее 50% домашних заданий 2) посещено не менее 80% занятий 3) студент ответил на теоретический вопрос без принципиальных ошибок в доказательствах и рассуждениях 4) студент правильно решил как минимум одну из предложенных задач, возможно, с некоторыми погрешностями и неточностями
незачтено	Ставится, если выполнено не более двух из следующих четырех условий: 1) выполнено не менее 50% домашних заданий 2) посещено не менее 80% занятий 3) студент ответил на теоретический вопрос без принципиальных ошибок в доказательствах и рассуждениях 4) студент правильно решил как минимум одну из предложенных задач, возможно, с некоторыми погрешностями и неточностями

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

ИОПК 4.1 Проводит поиск и обработку научной и научно-технической информации, необходимой для решения исследовательских задач

ИОПК 4.2 Оценивает полученные результаты и формулирует выводы по итогам проведенных исследований

ИПК 1.1 Проводит работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований

ИПК 1.2 Подготавливает планы и программы проведения отдельных этапов научно-исследовательской работы

ИПК 1.3 Проводит отдельные этапы научно-исследовательской работы

1. (ИОПК 4.1) Установите, какому термину какое определение соответствует:

Предбаза топологического пространства X
База топологического пространства X
Сеть топологического пространства X

а)	Такое семейство $\mathcal{A}$ подмножеств пространства X, что для любой точки $x \in X$ и любого открытого множества $U \subset X$, содержащего x, найдется такое множество $V \in \mathcal{A}$, что $x \in V \subset U$
б)	Такое семейство $\mathcal{A}$ открытых подмножеств пространства X, что для любой точки $x \in X$ и любого открытого множества $U \subset X$, содержащего x, найдется такое множество $V \in \mathcal{A}$, что $x \in V \subset U$
в)	Такое семейство $\mathcal{A}$ открытых подмножеств пространства X, что семейство всевозможных конечных пересечений элементов $\mathcal{A}$ является базой в X

2. (ИПК 1.1) Из следующих отображений подмножеств вещественной прямой выберите те отображения, которые не являются открытыми:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.
3) $f: (-\infty; 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.
5) $f: \mathbb{R} \to [-1; 1]$, $f(x) = \sin x$.

3. (ИПК 1.1) Из следующих отображений подмножеств вещественной прямой выберите те отображения, которые являются замкнутыми:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.
2) $f: (0; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 1/x$.
3) $f: [0; 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.
4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$.
5) $f: \mathbb{R} \to (-\pi/2\,;\, \pi/2), f(x) = \operatorname{arctg} x$.

4. (ИПК 1.2) Пусть E – линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Выберите все верные утверждения:
1) фундаментальную систему окрестностей нуля топологии на E образуют все множества вида $\{x \in E \mid \|x\| < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$.
2) фундаментальную систему окрестностей нуля топологии на E образуют все множества вида $\{x \in E \mid \|x\| = \varepsilon\}, \varepsilon > 0$.
3) фундаментальную систему окрестностей нуля топологии на E образуют все множества вида $\{x \in E \mid \|x\| \geq \varepsilon\}, \varepsilon > 0$.

5. (ИОПК 4.1) Установите, какой аксиоме отделимости топологического пространства X эквивалентно утверждение:

T_0	
T_1	
T_2	
T_3	
T_4	

а)	$\overline{\{x\}} = \{x\}$ для любой точки $x \in X$
б)	$\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ для любой пары различных точек $x, y \in X$
в)	Для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любого такого открытого множества $U \subset X$, что $F \subset U$, найдется такое открытое множество $V \subset X$, что $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$
г)	Каждая точка $x \in X$ является пересечением замыканий всех своих окрестностей
д)	Для любой точки $x \in X$ и любого такого открытого множества $U \subset X$, что $x \in U$, найдется такое открытое множество $V \subset X$, что $x \in V \subset \overline{V} \subset U$

6. (ИПК 1.3) Пусть $p_s: \prod_{s \in S} X_s \to X_s$ – проекция из произведения семейства топологических пространств на соответствующий сомножитель. Выберите верные утверждения:

1) отображение p_s открыто.
2) отображение p_s замкнуто.
3) отображение p_s открыто-замкнуто.
4) отображение p_s может быть не открытым.
5) отображение p_s может быть не замкнутым.

7. (ИПК 1.2) Какие из следующих пар являются компактификациями вещественной прямой $\mathbb{R}$?

1) $\left((-\pi/2; \pi/2),\ f(x) = \operatorname{arctg} x\right)$.
2) $\left([-1; 1],\ f(x) = \frac{x}{1+|x|}\right)$.
3) $\left([-1; 1],\ f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)$.
4) $\left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},\ f(t) = \left(\cos\frac{\pi t}{1+|t|};\ \sin\frac{\pi t}{1+|t|}\right)\right)$.
5) $\left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},\ f(t) = (\cos \pi t\,; \sin \pi t)\right)$.

6) $\left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\right\},\ f(t) = \left(\cos\frac{\pi t}{1+|t|};\ \sin\frac{\pi t}{1+|t|}\right)\right)$.

8. (ИОПК 4.2) Установите, какому классу топологических пространств соответствует определение:

Компактное пространство	
Счетно компактное пространство	
Финально компактное пространство	
Псевдокомпактное пространство	
Секвенциально компактное пространство	

а)	Из любой последовательности точек пространства можно извлечь сходящуюся подпоследовательность
б)	Из любого счетного открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие
в)	Любая непрерывная вещественнозначная функция, определенная на всем пространстве, ограничена
г)	Из любого открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие
д)	Из любого открытого покрытия можно извлечь счётное подпокрытие

Ответы на тест.
1.

Предбаза топологического пространства X	База топологического пространства X	Сеть топологического пространства X
в)	б)	а)

2. 1), 4).

3. 1), 3), 5).

4. 1).

5.

T_0	T_1	T_2	T_3	T_4
б)	а)	г)	д)	в)

6. 1), 5).

7. 2), 4).

8.

Компактное пространство	Счетно компактное пространство	Финально компактное пространство	Псевдокомпактное пространство	Секвенциально компактное пространство
г)	б)	д)	в)	а)

Информация о разработчиках

Гензе Леонид Владимирович, к.ф.-м.н., доцент каф. математического анализа и теории функций