

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

Нелинейные уравнения математической физики

по направлению подготовки
03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки:
«Медицинская и биологическая физика»

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2025

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
В.П. Демкин

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений

ИОПК 1.2 Применяет физические и математические модели и методы при решении теоретических и прикладных задач

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

I. По дисциплине «Нелинейные уравнения математической физики» предусмотрены тесты по разделам: Темы 1-7 (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2). Тесты размещены в системе LMS Moodle ТГУ (Learning Management System Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) по ссылке: <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=2425>

Тесты по курсу составлены на основе банка вопросов в курсе Moodle.

Пример теста к Теме 1 курса.

Вопрос: Как узнать, однородно ли уравнение $Lu=0$?

Допускается несколько ответов.

а) Если $u=0$ является решением, то уравнение $Lu=0$ однородно.

б) Если $u=0$ не является решением, то уравнение $Lu=0$ однородно.

в) Записать $Lu=f$, если $u=1$ есть решение, то уравнение однородно

Ключи: верный ответ а) (100%).

Критерии оценивания: Прохождение теста при правильном ответе (100%) оценивается в 2 балла. Максимальная оценка 100% при правильном ответе а), выбор остальных ответов 0%. Набранные баллы вычисляются системой.

II. По теоретическим разделам курса в темах 4-7, а также по темам 1-4 практических занятий в курсе предусмотрены Задания (ОПК-1, ИОПК 1.1, ИОПК 1.2).

Пример Задания по Теме 3: Нелинейные волны.

Дать ответы (в виде файла или текста) на контрольные вопросы по теме.

Контрольные вопросы:

1 Объясните понятие гиперболической волны.

2 В чем состоит явление дисперсии волны?

3 Запишите уравнение распространения одномерной нелинейной волны.

4 Дайте определение характеристики уравнения распространения одномерной нелинейной волны.

5 Какой вид имеют характеристики уравнения распространения одномерной нелинейной волны?

6 Что является причиной опрокидывания фронта волны?

7 Запишите аналитическое условие опрокидывания фронта одномерной нелинейной волны.

Студенты выполняют задание в форме эссе.

Критерии оценивания: Представленный файл эссе оценивается по форме элемента Задание системы Moodle: «простое непосредственное оценивание» по шкале в форме Pass/Fail (зачтено/не зачтено).

III. Контрольная работа по курсу проводится в виде решения 2х задач из банка задач (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2) в курсе Moodle, а также из авторского сборника задач, отраженного в списке литературы. Примеры задач из контрольных работ.

Задача 1.

Проверить, будут ли указанные ниже функции решениями уравнения

$$u_{xx}^2 - 4u_{xy} + u_{yy}^2 = 8 :$$

а) $u = x^2 + y^2$, б) $u = 2\sqrt{2}xy$

Ключи: правильный ответ а).

Задача 2.

Для указанного ниже уравнения записать систему/уравнение в вариациях.

Проверить, что соответствующая функция является решением уравнения.

Определить тип уравнения для указанного решения.

$$\frac{2}{3}yu_{yy} + u_{xx}^2 + u_y = 0, \quad u = \frac{x}{\sqrt{y}} + \alpha.$$

Ключи: 1) Заданная функция $u = u(x, t)$ является решением уравнения. 2)

Нелинейное уравнение не является квазилинейным и его тип не определяется. 3)

Уравнение в вариациях для заданного нелинейного уравнения и функции $h = h(x, t)$ имеет

вид: $\frac{2}{3}yh_{yy} + h_x = 0.$

Критерии оценивания: результаты контрольной работы определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если студент предъявляет правильные письменные решения двух задач, то есть для каждой задачи способен обосновать метод решения, понимает используемые термины и формулы и получил правильный ответ. При невыполнении указанных критериев оценки «зачтено» выставляется оценка «не зачтено».

IV. Для углубленного изучения курса по основным разделам курса студентам предлагаются темы для рефератов (ОПК-1, ИОПК 1.1, ИОПК 1.2).

Темы для рефератов и учебно-методическая литература для самостоятельной работы по разделам дисциплины «Нелинейные уравнения математической физики»:

Тема 1. Распространение тепла в нелинейной среде с учетом релаксации теплового потока.

Литература:

1)Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учеб. пособие. --- 6-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГУ, 1999. - 798 с.

2) Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики./Отв. ред. Акад. А.А. Самарский, чл.-корр. АН РАН С.П. Курдюмов, к.ф.-м.н. В.И. Мажукин. М.: Наука, 1987. – 280 с.

3) Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1966.- 367 с.

4) Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. – 622 с.

Тема 2. Нелинейные волны в диспергирующей среде.

Литература:

1)Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. – 323 с.

2)Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. – 480 с.

3) Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. - М.: Наука, 1988.- 694 с.

4) Гончаренко А. М. Пучки и солитоны. Минск.: Издательский дом “Белорусская наука”. 2014. 127 с. Электронное издание. Доступ: <http://www.litres.ru/a-m-goncharenko/opticheskie-gaussovy-puchki-i-solitony/>

5)Кившарь Ю.С, Агравал Г.П. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 648 с.

6) Soliton theory and its applications./Ed . Gu Chaohao. Berlin, Heidelberg, Toronto, London, Paris, Tokio: - Springer, 1991. - 403 pp.

7) Солитоны/ Ред. Буллаф Р., Кодри Ф./пер.с англ. Дубровина Б.А., Кричевера И.М., Манакова С.В. Под. Ред. С.П. Новикова. М.: Мир, 1983. - 408 с.

Тема 3. Односолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера.

Литература:

1) Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. – 323 с.

2) Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. – 480 с.

3) Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980. - 319 с.

4) Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. - М.: Наука, 1988. 694 с.

5) Солитоны/ Ред. Буллаф Р., Кодри Ф./пер.с англ. Дубровина Б.А., Кричевера И.М., Манакова С.В. Под. Ред. С.П. Новикова. М.: Мир, 1983. 408 с.

6) Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений. - М.: Наука, 1988.-469 с.

7) Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.- 527 с.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Зачет в 6 семестре проводится в устной форме по экзаменационным билетам.

Билет содержит два теоретических вопроса, проверяющих освоение компетенций ОПК-1, ОПК -1в соответствии с индикаторами достижения ИОПК 1.1, ИОПК 1.2. После ответа на билет студент отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы из открытого перечня вопросов экзаменационных билетов, открытого банка задач, тестов (п. 2), направленные на проверку достижения ОПК-1.1, ИПК 1.1 и ИОПК 1.2.

Примерный перечень теоретических вопросов.

Вопрос 1. Объясните понятие автомодельной переменной в задаче Стефана. Построить решение задачи Стефана методом автомодельной переменной.

Вопрос 2. Объясните явление опрокидывания фронта волны, распространяющейся в нелинейной среде. Запишите условие опрокидывания фронта волны.

Примеры задач.

Задача 1. Из условия баланса тепловой энергии в среде вывести уравнение теплопроводности в случае, когда коэффициент теплопроводности степенным образом зависит от температуры при наличии в среде источников тепла мощностью $F(\vec{r}, t)$.

Задача 2. Найти дисперсионное соотношение для линейного уравнения КдВ

$$u_t + c_0 u_x + \nu u_{xxx} = 0.$$

Ключи: дисперсионное соотношение имеет вид $\omega(k) = c_0 k - \nu k^3$

Отметка «Зачтено» ставится студенту при правильном ответе не менее чем на 60% вопросов билета и дополнительных вопросов.

Открытый перечень вопросов, выносимых на зачет.

Вопросы по темам 1,2.

1. Классификация квазилинейного уравнения II порядка с двумя независимыми переменными. Формулы преобразования коэффициентов при вторых производных. Типы уравнения II порядка.
2. Записать систему уравнений, определяющих переход к канонической форме квазилинейного уравнения II порядка, если коэффициенты при вторых производных зависят от искомой функции. В чем отличие от случая линейного уравнения?
3. Получить формулу для коэффициента $\bar{a}_{11}$ в канонических переменных.
4. Получить условие Стефана на границе раздела твердой и жидкой фаз.

5. Сформулировать задачу Стефана о фазовом переходе.
6. Построить автомодельное решение в задаче Стефана.
7. Найти уравнение движения фронта раздела фаз в задаче Стефана.
8. Задачи с внутренней нелинейностью. Задача о распространении тепла в среде с коэффициентом теплопроводности, степенным образом зависящим от температуры.
9. Получить уравнение движения фронта тепловой волны в среде со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.
10. Показать, что в среде с нелинейным коэффициентом теплопроводности $k = k_0 u^\sigma$ в пределе $\sigma \rightarrow 0$ решение нелинейного уравнения теплопроводности переходит в решение линейной задачи.

Вопросы по теме 3.

1. Система уравнений типа «реакция-диффузия». Понятие об активаторе и ингибиторе. Постановка задачи об образовании диссипативных структур.
2. Получить условия нарушения устойчивости в задаче типа «реакция-диффузия».
3. Получить условия неустойчивости для осциллирующих флуктуаций. При каком условии в среде всегда возникает осциллирующие во времени флуктуации?
4. Условия возникновения апериодических во времени флуктуаций.
5. Найти стационарное решение и условия неустойчивости в модели Гирера-Майнхарда.
6. Найти стационарное решение в модели брюсселятора. Найти критическое значение управляющего параметра и малого параметра.

Вопросы по теме 4.

1. Дать определение гиперболической и диспергирующей волн.
2. Найти решение уравнения $u_t + c(u)u_x = 0$ методом характеристик.
3. Объяснить явление опрокидывания фронта волны, распространяющегося в нелинейной среде. Записать условие опрокидывания фронта волны.

Вопросы по темам 5-7.

4. Сформулировать постановку задачи о рассеянии на потенциале $u(x)$ для одномерного квантовомеханического уравнения Шредингера.
5. Объяснить квантовомеханический смысл функций $a(k)$, $b(k)$ в задаче рассеяния. Доказать соотношение $|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1$, $\text{Im } k = 0$.
6. Вычислить вронскиан функций Иоста $w(\varphi(x, k), \bar{\varphi}(x, \bar{k}))$.
7. Записать интегральное уравнение, определяющее функцию Иоста $\varphi(x, k)$ ($\chi_+(x, k) = e^{ikx} \varphi(x, k)$) и показать, что $\chi_+(x, k)$ аналитична в верхней полуплоскости k .
8. Доказать, что точки верхней полуплоскости k , в которых $a(k)$ обращается в нуль, являются точками дискретного спектра для одномерного уравнения Шредингера $-\varphi'' + u(x)\varphi = k_0^2 \varphi$.
9. Сформулировать постановку обратной задачи рассеяния для одномерного уравнения Шредингера в квантовой механике.
10. Понятие о данных рассеяния. Вывод уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко.
11. Получить формулу, выражающую потенциал $u(x)$ в обратной задаче рассеяния. Уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ).
12. Понятие об (L-A)-паре для нелинейного уравнения. (L-A)-пара для уравнения КдФ.
13. Показать, что если $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению КдФ, то дискретные собственные значения уравнения Шредингера $-\psi'' + u(x, t)\psi = \lambda \psi$ не зависят от t .
14. Понятие от эволюции данных рассеяния для потенциала $u(x, t)$, удовлетворяющего

- уравнению КдФ. Уравнения Гарднера-Грина-Крускала-Миуры.
15. Схема интегрирования уравнения КдФ методом обратной задачи рассеяния.
 16. Понятие о безотражательном потенциале в обратной задаче рассеяния. Решения уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко для безотражательного потенциала.
 17. N-солитонное решение уравнения КдФ. 1-солитонное решение.

Критерии оценивания.

В курсе «Нелинейные уравнения математической физики» используется балльно-рейтинговая система оценки знаний. Максимальная сумма баллов по дисциплине составляет 100 баллов и формируется следующим образом: 60 баллов по результатам текущей аттестации и 40 баллов по результатам промежуточной аттестации (зачет). Итоговая оценка по дисциплине складывается из суммы баллов, полученной по итогам текущего контроля и промежуточной аттестации (устного зачета).

Текущая аттестация включает:

- активность студента на практических занятиях (0-15 баллов); весь семестр разбит на 3 этапа по четыре недели, баллы выставляются в конце каждого этапа (0-5 баллов).
- результаты выполнения контрольных работ (0-15 баллов),
- реферат (0-20 баллов), при невыполнении срока сдачи реферата за каждую просроченную неделю снимается 5 баллов.
- Промежуточная аттестация подразумевает проведение теоретического зачета в устной форме, который предусматривает дифференцированное оценивание ответа (0-40 баллов). К зачету допускаются только студенты, успешно прошедшие текущую аттестацию и выполнившие 70% практических заданий. Каждый билет состоит из двух теоретических вопросов.

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест (ИОПК-1.2.).

Какой закон устанавливает связь теплового потока с температурой.

- а) Закон Фурье.
- б) Преобразование Фурье.
- в) 2-й закон Ньютона.

Ключи: а).

Задачи (ИОПК-1.1).

Задача 1. В модели с кубической нелинейностью $q(u, v, A) = u^3 - u - v$, $Q(u, v, A) = u + v - A$ найти стационарные решения реакционно-диффузионной системы

$$\tau_u u_t = l^2 \Delta u - q(u, v, A), \quad \tau_v v_t = l^2 \Delta v - Q(u, v, A) \quad .$$

Ответ. $u_h = \sqrt[3]{A} \quad v_h = A - \sqrt[3]{A} \quad .$

Задача 2. Для линейного уравнения Буссинеска $u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} - \beta^2 u_{ttt} = 0$ найти дисперсионное соотношение и фазовую скорость.

Ответ. Дисперсионное соотношение имеет вид $\omega(k) = \pm \alpha k (1 + \beta^2 k^2)^{-1/2}$, фазовая скорость: $v_\phi = \frac{\omega(k)}{k} = \pm \alpha (1 + \beta^2 k^2)^{-1/2} \quad .$

Теоретические вопросы (ИОПК 1.1, ИОПК 1.2):

1. Получить условие Стефана на границе раздела твердой и жидкой фаз.
2. Сформулировать задачу Стефана о фазовом переходе.
3. Найти уравнение движения фронта раздела фаз в задаче Стефана.
4. Дать описание системы уравнений типа «реакция-диффузия». Объяснить понятие об активаторе и ингибиторе.
5. Объяснить постановку задачи об образовании диссипативных структур.
6. Найти стационарное решение и условия неустойчивости в модели Гирера-Майнхарда.

7. Дать определение гиперболической и диспергирующей волн.
8. Найти решение уравнения $u_t + c(u)u_x = 0$ методом характеристик.
9. Объяснить явление опрокидывания фронта волны, распространяющегося в нелинейной среде. Записать условие опрокидывания фронта волны.
10. Сформулировать постановку задачи о рассеянии на потенциале $u(x)$ для одномерного квантовомеханического уравнения Шредингера.
11. Вычислить вронскиан функций Иоста $w(\phi(x, k), \bar{\phi}(x, \bar{k}))$.
12. Сформулировать постановку обратной задачи рассеяния для одномерного уравнения Шредингера в квантовой механике.
13. Сформулировать понятие о данных рассеяния. Объяснить вывод уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко.
14. Сформулировать определение (L-A)-пары для нелинейного уравнения. Вид (L-A)-пары для уравнения КдФ.
15. Сформулировать понятие об эволюции данных рассеяния для потенциала $u(x, t)$, удовлетворяющего уравнению КдФ. Что описывают уравнения Гарднера-Грина-Крускала-Миуры?
16. Сформулировать схему интегрирования уравнения КдФ методом обратной задачи рассеяния.
17. Объяснить понятие о безотражательном потенциале в обратной задаче рассеяния.
18. Записать уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко для безотражательного потенциала.
19. Получить выражение для N-солитонного решения уравнения КдФ, рассмотреть случай 1-солитонного решения.

Информация о разработчиках

Шаповалов Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики ФФ НИ ТГУ.