

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физико-технический факультет

УТВЕРЖДЕНО:  
Декан  
Ю.Н. Рыжих

Оценочные материалы по дисциплине

**Математическая физика**

по направлению подготовки / специальности

**16.03.01 Техническая физика**

Направленность (профиль) подготовки/ специализация:  
**Компьютерное моделирование в инженерной теплофизике и аэрогидродинамике**

Форма обучения  
**Очная**

Квалификация  
**Инженер, инженер-разработчик**

Год приема  
**2024**

СОГЛАСОВАНО:  
Руководитель ОПОП  
Э.Р. Шрагер  
Ю.Н. Рыжих

Председатель УМК  
В.А. Скрипняк

Томск – 2024

## **1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:  
ОПК-2 Способен выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

РООПК-2.1 Знает методику выявления естественнонаучной сущности проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и методику привлечения физико-математического аппарата и современные компьютерных технологий для их решения

РООПК-2.2 Умеет выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности и привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии

## **2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания**

Элементы текущего контроля:

- тесты на знание теоретического материала;
- контрольные работы по основным разделам математической физики

### **5 семестр обучения**

#### **Тест (выполняется как домашнее задание или на практическом занятии, РООПК-2.1.)**

Примеры вопросов:

1. Какие из нижеперечисленных граничных условий для уравнения колебаний соответствуют свободному концу стержня:
  - а) 1-го рода
  - б) 2-го рода
  - в) 3-го рода
  - г) 4-го рода
2. Назовите изображение функции  $\sin(t)/t$ :
  - а)  $\text{arctg}(p)$
  - б)  $2p/(p^2+1)^2$
  - в)  $1//(p^2+1)^2$
  - г)  $\text{arcctg}(p)$

Ключи: 1 б), 2 б).

Критерии оценивания: тест считается пройденным, если обучающий ответил правильно как минимум на половину вопросов.

#### **Контрольная работа №1 (выполняется на практическом занятии, РООПК-2.2.)**

Контрольная работа состоит из 3 задач на тему операционного исчисления.

Примеры вариантов задач:

1. Найти оригинал  $\frac{p}{(p^2 - a^2)^2}$ .

2. Найти решение уравнения  $y'' + 3y' - 4y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

3. Вычислить интеграл, найдя предварительно его изображение по Лапласу

$$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{a^2 + t^2} dt.$$

Ответы:

Задача 1.  $t\sin(at)/(2a)$

Задача 2.  $y(x) = (e^x - e^{-4x})/5$ .

Задача 3.  $\pi \exp(-ax) / (2a)$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если правильно без ошибок решены две задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если правильно без ошибок решена одна задача и в решении других задач имеются ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не решены все задачи или при решении всех задач допущены ошибки.

### **Контрольная работа №2 (выполняется на практическом занятии, РООПК-2.2.)**

Контрольная работа состоит из 2 задач на тему дифференциальных уравнений первого порядка.

Примеры вариантов задач:

1. Найти решение уравнения, удовлетворяющее указанному условию

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x, z = y^2 \text{ при } x = 0$$

2. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} (x-1) \frac{\partial u}{\partial t} - (x+1) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ (x+1) \frac{\partial u}{\partial t} + -(x-1) \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Ответы:

Задача 1.  $z = \ln|y| - \ln\sqrt{y^2 - x^2} + y^2 - x^2$

Задача 2.  $u = g(t+2x) + f(t-x^2)$ ,  $v = g(t+2x) - f(t-x^2)$ .

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если правильно без ошибок решена одна задача и при решении другой задачи допущена ошибка.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если правильно без ошибок решена одна задача.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не решены все задачи или при решении всех задач допущены ошибки.

## **6 семестр обучения**

### **Тест (выполняется как домашнее задание или на практическом занятии, РООПК-2.1.)**

Примеры вопросов:

1. Характеристики для уравнения колебаний имеют вид...:
  - a)  $x-t=c_1, x+t=c_2$
  - б)  $x-t^2=c_1, x+t^2=c_2$
  - в)  $x-at^2=c_1, x+at^2=c_2$
  - г)  $x-at=c_1, x+at=c_2$
2. Что из перечисленного используется для решения задачи Дирихле внутри круга?
  - а) преобразование обратных радиусов
  - б) метод отражений
  - в) интегральная формула Коши
  - г) вторая формула Грина

Ключи: 1 г), 2 а).

Критерий оценивания: тест считается пройденным, если обучающий ответил правильно как минимум на половину вопросов.

### **Контрольная работа №1 (выполняется на практическом занятии, РООПК-2.2.)**

Контрольная работа состоит из 2 задач на тему решения методом Фурье однородных уравнений математической физики.

Примеры вариантов задач:

1. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0,$$
$$u(x,0) = Ax, \quad u_t(x,0) = 0 \quad (A = \text{const})$$

2. Разложить функцию  $f(x) = 1$  в ряд Фурье по собственным функциям первой краевой задачи.

Ответы:

$$\text{Задача 1. } u(x,t) = \frac{8Al}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}$$

$$\text{Задача 2. } f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(\pi nx / l)}{2n+1}$$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если правильно без ошибок решена одна задача и в решении другой задачи допущена ошибка.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если правильно без ошибок решена только одна задача.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не решены все задачи или при решении всех задач допущены ошибки.

### **Контрольная работа №2 (выполняется на практическом занятии, РООПК-2.2.)**

Контрольная работа состоит из 2 задач на тему решения методом Фурье неоднородных краевых задач математической физики.

Примеры вариантов задач:

1. Решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u_1, \quad u(l,t) = u_2,$$

$$u(x,0) = u_0 \quad (u_1 = \text{const}, \quad u_2 = \text{const}).$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{F}{ES}, \quad (F = \text{const}, \quad E = \text{const}, \quad S = \text{const})$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0.$$

Ответы:

Задача 1.

$$u(x,t) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1} \left\{ (u_0 - u_1) [1 - (-1)^n] + (-1)^{n+1} (u_1 - u_2) \right\} \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t \right) \sin \frac{n \pi x}{l}$$

Задача 2.

$$u(x,t) = \frac{F}{ES} x - \frac{8Fl}{ES\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}$$

Критерии оценивания:

Результаты контрольной работы определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если все задачи решены без ошибок.

Оценка «хорошо» выставляется, если правильно без ошибок решена одна задача и частично решена другая задача.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если правильно без ошибок решена одна задача.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не решены все задачи.

### **3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания**

Промежуточная аттестация реализуется путем проведения экзаменов после каждого семестра. К экзамену студент должен получить допуск за практическую часть курса, который определяется по результатам оценок за контрольные и домашние задания. При этом если какая-то контрольная работа не выполнялась студентом совсем или индивидуальное задание выполнено на «не засчитено», то студент не допускается к экзамену.

Экзаменационный билет за **5 семестр** обучения включает два теоретических вопроса.

Первый вопрос относится к операционному методу (интегральное преобразование Лапласа) и к применению операционного метода для решения задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями и задач математической физики. Относится к индикатору РООПК-2.2. Второй вопрос билета относится выводу уравнений колебаний и теплопроводности на основе фундаментальных законов общей физики, решению задачи Коши с помощью функции Грина для этих уравнений, уравнениям в частных производным первого порядка и методу характеристик. Относится к индикаторам РООПК-2.1. и РООПК-2.2.

Критерий оценки вопроса на экзамене:

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
означает неспособность студента математически верно сформулировать определения или результаты, требуемые в вопросе	означает неспособность студента привести доказательства верно сформулированных результатов и неумение применить сформулированные определения и результаты к решению задач математической физики	означает способность студента верно сформулировать результат и привести отдельные части доказательства или решения при не способности построить логическую цепочку доказательства (решения задачи математической физики) без дополнительных указаний	означает способность студента привести доказательства верно сформулированных результатов или умение применить сформулированные определения и результаты к конкретной ситуации, делать необходимые обобщения и выводы, найти решения задач математической физики

### Примерный перечень теоретических вопросов, выносимых на экзамены:

#### **5 семестр.**

##### *Первый вопрос билета.*

1. Обобщенные функции: Дирака и Хэвисайда.
2. Основные понятия интегрального преобразования Лапласа.
3. Формулы обращения интегрального преобразования Лапласа.
4. Свойство линейности и теорема подобия операционного исчисления.
5. Свойства дифференцирования оригинала и изображения.
6. Свойства интегрирования оригинала и изображения.
7. Формула Парсеваля.
8. Теоремы запаздывания и смещения.
9. Теорема умножения.
10. Интеграл Диомеля.
11. Обобщенная теорема умножения (теорема Эфроса).
12. Теоремы разложения операционного исчисления.
13. Решение ОДУ методом интегрального преобразования Лапласа. Применение интеграла Диомеля к решению неоднородного ОДУ.
14. Применение операционного метода к решению дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

##### *Второй вопрос билета.*

- Уравнение поперечных колебаний струны (вывод) и постановка краевой задачи.
- Уравнение теплопроводности (вывод) и постановка краевой задачи.
- Теорема о единственности решения краевых задач для уравнений параболического типа.
- Принцип максимума для решения уравнения теплопроводности.
- Функция Грина для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
- Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
- Решение задачи Коши методом функции Грина для неоднородного уравнения теплопроводности.
- Решение уравнения теплопроводности в полуограниченной области (метод продолжений).
- Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка. Характеристическая система уравнений.
- Уравнение в частных производных первого порядка. Характеристическая система уравнений.
- Гиперболическое уравнение с частными производными первого порядка (на примере уравнения переноса). Характеристики, общее и частное решение.
- Уравнения акустики. Характеристики и инварианты Римана
- Корректная постановка краевых условий для гиперболической системы уравнений (привести пример).
- Характеристики системы гиперболических уравнений с частными производными первого порядка. Соотношения на характеристиках, общее и частное решение.

## **6 семестр.**

Экзаменационный билет за 6 семестр обучения включает два теоретических вопроса.

Первый вопрос относится к классификации уравнений второго порядка в частных производных, методу распространяющихся волн, методу разделения переменных для решения краевых задач математической физики. Относится к индикатору РООПК-2.2. Второй вопрос билета относится к решению уравнений математической физики методом Фурье с использованием специальных функций и элементам теории линейных интегральных уравнений. Относится к индикаторам РООПК-2.1. и РООПК-2.2.

Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
означает неспособность студента математически верно сформулировать определения, теоремы или результаты, требуемые в вопросе	означает неспособность студента привести доказательства верно сформулированных теорем, результатов и неумение применить сформулированные определения и результаты к решению задач математической физики	означает способность студента верно сформулировать результат и привести отдельные части доказательства или решения при не способности построить логическую цепочку доказательства (решения задачи математической физики) без дополнительных указаний	означает способность студента привести доказательства верно сформулированных результатов или умение применить сформулированные определения и результаты к конкретной ситуации, делать необходимые обобщения и выводы, найти решения задач математической физики

*Первый вопрос билета.*

1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка.
2. Приведение уравнений в частных производных второго порядка к канонической форме (параболический, эллиптический, гиперболический тип).
3. Метод распространяющихся волн решения задачи Коши для уравнения колебаний. Формула Даламбера.
4. Решение задачи Коши для уравнения колебаний в полуограниченной области.
5. Метод разделения переменных (метод Фурье) для уравнений колебаний с однородными граничными условиями.
6. Решение неоднородного уравнения колебаний. Общая схема решения краевых задач для уравнения колебаний методом разделения переменных.
7. Метод разделения переменных (метод Фурье) для уравнений теплопроводности с однородными граничными условиями.
8. Решение неоднородного уравнения теплопроводности. Общая схема решения краевых задач для уравнения теплопроводности методом разделения переменных.
9. Решение методом разделения переменных уравнения Лапласа в прямоугольной области.
10. Решение простейших краевых задач с уравнением Лапласа в полярной системе координат.
11. Задачи Дирихле и Неймана для круга.
12. Решение многомерных задач математической физики методом Фурье, не требующее применение специальных функций.

*Второй вопрос билета.*

1. Фундаментальное решение уравнения Лапласа и свойства гармонических функций.
2. 1, 2 и 3 формулы Грина.
3. Функция источника для уравнения Лапласа и ее основные свойства. Метод электростатических изображений.
4. Функция источника задачи Дирихле для сферы, круга, полуплоскости и полупространства.
5. Уравнение Бесселя и его решение.
6. Цилиндрические функции. Решение краевых задач математической физики с использованием функций Бесселя.
7. Уравнение Лежандра и его решение. Полиномы Лежандра.
8. Присоединенные функции Лежандра. Сферические функции. Шаровые функции.
9. Решение задачи Дирихле для шара методом разделения переменных.
10. Решение задачи об остыании шара методом разделения переменных.
11. Интегральные уравнения Фредгольма. Связь интегральных уравнений с обыкновенными дифференциальными уравнениями.
12. Решение интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром.
13. Теоремы Фредгольма.
14. Интегральные уравнения с симметричными ядрами.
15. Теорема Гильберта-Шмидта.
16. Теорема Стеклова и обоснование метода Фурье.

**4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)**

Данный тест может быть предложен студентам 4 курса бакалавриата, базового высшего образования после получения оценок за 5, 6 семестр по дисциплине «Математическая физика». Предлагается один вариант теста, выбранный случайным образом. Для успешного выполнения теста ответы на 2/3 вопросов должны быть верными.

Кроме того, ответ на каждый вопрос должен быть дополнен определением основных терминов математической физики, встретившихся в его формулировке. Эти определения необходимо взять из представленной ниже основной литературы по дисциплине или из других источников, с указанием источника.

Тест

1. Упругое закрепление стержня соответствует граничным условиям...  
(РООПК-2.2.)
  - а) 1-го рода
  - б) 2-го рода
  - в) 3-го рода
  - г) 4-го рода
2. Назовите канонический тип уравнения колебаний. (РООПК- 2.2)
  - а) Эллиптический
  - б) Параболический
  - в) Гиперболический
3. Определите верное утверждение.  
(РООПК- 2.1)
  - а) Уравнения акустики описывают колебания струны.
  - б) Уравнения акустики описывают распространение малых возмущений в подвижной среде.
  - в) Уравнения акустики описывают распространение малых возмущений в покоящейся среде.
4. Какое свойство является лишним для функции-оригинала? (РООПК- 2.2)
  - а) дифференцируемость
  - б) равенство нулю при отрицательных значениях аргумента
  - в) ограниченность роста экспонентой
  - г) непрерывность
5. Определите оригинал функции:  $\exp(-2p)/p$ .  
(РООПК- 2.2)
  - а)  $\eta(t-2)$
  - б)  $(t-2)\eta(t-2)$
  - в)  $\eta(t+2)$
  - г)  $(t+2)\eta(t+2)$
6. Определите общее решение уравнения  $\partial u / \partial t + \partial u / \partial x = 0$ .  
(РООПК- 2.2)
  - а)  $u=f(x+t)$
  - б)  $u=f(x+t)+g(x-t)$
  - в)  $u=f(x-t)$
7. Какого свойства нет в операционном исчислении? (РООПК- 2.2)
  - а) теорема подобия
  - б) теорема умножения
  - в) теоремы разложения
  - г) теорема обращения
8. Может ли собственная функция быть равной нулю? (РООПК- 2.2)  
Выберите один ответ.
  - а) Может, если она является одним из решений уравнения Лежандра.
  - б) Да, может.
  - в) Да, может быть, если собственное значение равно нулю.
  - г) Нет, не может.
9. В каком случае совпадают собственные функции для краевых задач с уравнениями теплопроводности, колебаний и Лапласа, записанные в декартовой системе координат?  
(РООПК- 2.1).

- a) Если совпадают граничные условия по координатам.
- б) Если совпадают все краевые условия.
- в) Если граничные условия однородные.

10. Какая собственная функция соответствует первой краевой задаче?

(РООПК- 2.2)

- a)  $\sin(\pi kx)$
- б)  $\cos(\pi kx)$
- в)  $\operatorname{sh}(\pi kx)$
- г)  $\operatorname{ch}(\pi kx)$

11. Уравнение  $X'' + \lambda X = 0$  в задаче Штурма-Лиувилля соответствует ...

(РООПК- 2.2)

Выберете один ответ.

- а) любой ортогональной системе координат
- б) декартовой системе координат
- в) цилиндрической системе координат
- г) сферической системе координат

12. Согласно формуле Даламбера решение уравнения колебаний определяется...

(РООПК- 2.2)

- а) начальными условиями
- б) граничными и начальными условиями
- в) граничными условиями

Ключи: 1 в), 2 в), 3 в), 4 г), 5 а), 6 в), 7 г), 8 г), 9 а), 10 а), 11 б), 12 а).

Критерий оценивания: тест считается пройденным, если даны правильные ответы как минимум на половину вопросов.

### **Перечень учебной литературы**

1. Попов А.И., Попов И.Ю. Основные уравнения математической физики: Учебное пособие. - Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2020.
2. Емельянов В. М., Рыбакина Е. А. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач: Учебное пособие для вузов: Издательство "Лань", 2024.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Издательство «Лань», 2002.
4. Кузнецов Е.А., Шapiro Д.А. Методы математической физики. Новосибирск: Издательство НГУ, 2011.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1972.
6. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 416 с.

### **Информация о разработчиках**

Прокофьев Вадим Геннадьевич, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры математической физики ФТФ НИ ТГУ.