Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ
Л.В. Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Дополнительные главы функционального анализа
по направлению подготовки

01.04.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки
Математический анализ и моделирование

Форма обучения
Очная

Квалификация
Магистр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
А.В. Старченко

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ИПК-1.1 Проводит исследования, направленные на решение отдельных исследовательских задач.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

– ИОПК-1.1. Формулирует поставленную задачу, пользуется языком предметной области, обоснованно выбирает метод решения задачи.

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– индивидуальные задания (ИОПК1.1)
– контрольная работа (ИОПК1.1)

Индивидуальное задание 1

Для успешного прохождения задания необходимо:

1. Решить верно предложенные преподавателем задачи.
2. При собеседовании с преподавателем, ответить на предложенные вопросы.

A-банахова алгебра. Для данного элемента $x \in A$ проверить:

1. Является ли элемент x регулярным в *A*.
2. Является ли элемент x делителем нуля.
3. Является ли элемент x топологическим делителем нуля.
4. Найти норму $\| x \|$, спектр $\sigma(x)$ и спектральный радиус $r(x)$.

C[a, b] – алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на [a, b] с нормой $\| x \|=\max\{|x(t)|:t\in[a, b]\}$ и поточечным умножением.

Cm (a, b) – пространство всех комплекснозначных непрерывных ограниченных функций на (a, b) с нормой $\| x \|=\sup\{|x(t)|:t\in(a, b)\}$ и поточечным умножением.

Cm ($\mathbb{R}$) – пространство всех комплекснозначных непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}$ с нормой $\| x \|=\sup\{|x(t)|:t\in\mathbb{R}\}$ и поточечным умножением.

Cm (0, +∞) – пространство всех комплекснозначных непрерывных ограниченных функций на (0, +∞)

с нормой $\| x \|=\sup\{|x(t)|:t\in(0, +\infty)\}$ и поточечным умножением.

$\ell\infty$ - пространство всех ограниченных числовых последовательностей с нормой $\| x \|=\sup\{|xn: n \in\mathbb{N}\}$ с покоординатным умножением.

c - пространство всех сходящихся числовых последовательностей с нормой

$\|x\|=\sup\{|x_n|: n\in\mathbb{N}\}$ с покоординатным умножением.

$L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ – пространство всех линейных ограниченных операторов $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ с нормой $\|T\|=\sup\{\|Tx\|: \|x\|\le 1\}$. Произведение в этом пространстве – это композиция операторов.

1. а). $e^{-t^2} \in C[-1,1]$ в). $T(x_1, x_2, x_3)=(T(x_2, x_3, 0)$, $T\in L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$
2. а). $\ln(t+1) \in C[0,1]$ в). $T(x_1, x_2, x_3)= (x_1, x_3, 0)$, $T\in L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$
3. а). $t^2-3t+2 \in C[0,2]$ в). $T(x_1, x_2, x_3)=(x_2, x_1, 0)$, $T\in L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$
4. а). $\frac{1}{t+1} \in C[0,2]$ в). $T(x_1, x_2, x_3)=(x_1, 0, x_2)$, $T\in L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$
5. а). $\frac{t+1}{t-1} \in C[-1,0]$ в). $T(x_1, x_2, x_3)=(0, x_1, x_3)$, $T\in L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$.

Индивидуальное задание 2

Целью индивидуального задания 2 является самостоятельная отработка студентами навыков решения практических заданий по второй части раздела 1.

Для успешного прохождения задания необходимо:

1. Решить верно предложенные преподавателем задачи.
2. При собеседовании с преподавателем, ответить на предложенные вопросы.

Примеры задач индивидуального задания 2

Является ли данное подпространство $L\subset E$

1. Замкнутым линейным подпространством
2. Гиперплоскостью
3. Идеалом
4. Максимальным идеалом.

1. L= $\{ x\in C[0,1]: \int tx(t)dt=0 \}$
2. L= $\{ x\in C[-1,1]: x(-1)=x(1) \}$
3. Множество чётных функций в пространстве C[-1,1]
4. Множество всех полиномов в пространстве C[0,1]
5. Множество всех непрерывно дифференцируемых функций в пространстве C[0,1]

6. L={ x∈C[0,1]: x(0)+x(1)=0 }

7. L={ x∈C[0,2]: x(0)+x(2)=2x(1) }

Контрольная работа

Целью контрольной работы №1 является оценка результатов освоения студентами материала раздела 1.

Примеры вариантов контрольной работы.

Вариант 1.

1. Проверить, является ли данное подпространство гиперплоскостью или максимальным идеалом

$$L=\{ x\in c0: \Sigma xn=0 \}$$

2. Проверить, являются ли данные элементы регулярными, топологическими делителями нуля и найти их норму и спектр

$\sin t\in Cm(0,\pi)$, $\Gamma(x_1,x_2)=(2x_2-x_1,\ 2x_1-x_2)$, $T\in L(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2)$

Вариант 2.

1. Проверить, является ли данное подпространство гиперплоскостью или максимальным идеалом

. $L=\{ x\in c: \lim x_n=x_1 \}$

2. Проверить, являются ли данные элементы регулярными, топологическими делителями нуля и найти их норму и спектр

$\cos t\in C_m\ (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\Gamma(x_1,x_2)=(2x_1-2x_2,\ 5x_2-2x_1)$, $T\in L(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2)$

Индивидуальное задание 3

Целью индивидуального задания №3 является самостоятельная отработка студентами навыков решения практических заданий по первой части раздела 2.

Для успешного прохождения задания необходимо:

1. Решить верно предложенные преподавателем задачи.
2. При собеседовании с преподавателем, ответить на предложенные вопросы.

Примеры задач индивидуального задания 3.

1. Проверить, является ли оператор T:$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

(a) Нормальным

(b) Унитарным

(c) Самосопряженным

(d) Положительным

2. Найти

$\|T\|$, $\sqrt{T}$, $|T|$, 2^T, T^4, 2^{-T}.

3. Найти спектральное разложение оператора T и описать пространства L_i, для которых P_i:$\mathbb{C}^n \to L_i$.

1. T: $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$
   $T(x_1, x_2) = (-2x_1 - x_2, -2x_2 - x_1)$.
2. T: $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$
   $T(x_1, x_2) = (\sqrt{2}x_2, \sqrt{2}x_1 + x_2)$.
3. T: $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$
   $T(x_1, x_2) = (5x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2)$
4. T: $\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$
   $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_2, 2x_2 - 2x_3, -2x_2 + 2x_3)$
5. T: $\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$
   $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_3, -x_2)$.

Индивидуальное задание 4

Целью индивидуального задания 4 является самостоятельная отработка студентами навыков решения практических заданий по второй части раздела 2.

Для успешного прохождения задания необходимо:

1. Решить верно предложенные преподавателем задачи.
2. При собеседовании с преподавателем, ответить на предложенные вопросы.

Примеры задач индивидуального задания 4.

Для данного фрейма в пространстве $\mathbb{C}^n$:

(a) Найти фреймовый оператор S.

(b) Найти оператор, обратный S

(c) Найти фреймовы границы и элементы, на которых достигаются граничные значения.

(d) Разложить произвольный элемент $x \in \mathbb{C}^n$ по фрейму.

1) f_1=(-1,0), $f_2=(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, f_3=(1,0)

2) $f_1=(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, f_2=(1,0), $f_3=(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

3) f_1=(0,1), $f_2=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $f_3=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, f_4=(0,-1)

4) f_1=(0,0,1), f_2=(0,1,0), $f_3=(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $f_4=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$

5) f_1=(1,0,0), f_2=(1,1,0), f_3=(0,1,0), f_4=(0,0,1)

Индивидуальное задание 5

Целью индивидуального задания №5 является самостоятельная отработка студентами навыков решения практических заданий по третьему разделу.

Для успешного прохождения задания необходимо:

1. Решить верно предложенные преподавателем задачи.
2. При собеседовании с преподавателем, ответить на предложенные вопросы.

Примеры задач индивидуального задания 5.

Неограниченные операторы

Пусть $T: H \to H$ линейный оператор в гильбертов пространстве H, $D(T)$ – область определения оператора T. Проверьте

1. Является ли $D(T)$ плотным линейным подпространством в H.
2. Является ли оператор T неограниченным. Место для уравнения.
3. Существует ли обратный оператор T^{-1}.
4. Является ли оператор T замкнутым. Найдите замыкание T.
5. Является ли оператор T симметричным, самосопряжённым.
6. Найдите T^* и $D(T^*)$.
7. Найдите $\sigma(T)$.

1. $H = \mathcal{L}_2(0, \frac{\pi}{2})$, $Tx(t) = \frac{x(t)}{\sin t}$
   $D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0, \frac{\pi}{2})\colon \frac{x(t)}{\sin t} \in \mathcal{L}_2(0, \frac{\pi}{2})\}$

2. $H = \mathcal{L}_2(0,1)$, $Tx(t) = \frac{x(t)}{t^2}$
   $D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0,1)\colon \frac{x(t)}{t^2} \in \mathcal{L}_2(0,1)$

3. $H = \mathcal{L}_2(0, \infty)$, $Tx(t) = tx(t)$
   $D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0, \infty)\colon x(t)e^t \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$
}
4. $H = \mathcal{L}_2(0, \infty)$, $Tx(t) = e^t x(t)$
   $D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0, \infty)\colon \exists n \in \mathbb{N},$ такое что $x|_{[n,+\infty)} \equiv 0\}$

5. $H = \mathcal{L}_2(0, \frac{\pi}{2})$, $Tx(t) = \frac{x(t)}{\sin t}$
   $D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0, \frac{\pi}{2})\colon \exists n \in \mathbb{N},$ такое что $x|_{(0,\frac{1}{n})} \equiv 0\}$

3. Оценочные материалы итогового контроля и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов и двух задач из индивидуальных заданий. Необходимым условием для получения положительной оценки является выполнение индивидуальных заданий.

Вопросы для проведения экзамена

1. Банаховы алгебры. Примеры. Свойства.
2. Регулярные элементы.
3. Топологические делители нуля.
4. Спектр. Непустота спектра.
5. Спектральный радиус.
6. Изменение спектра при переходе к подалгебрам
7. Максимальные идеалы в коммутативных алгебрах.
8. Мультипликативные функционалы.
9. Компактность множества мультипликативных функционалов
10. Преобразование Гельфанда.
11. B*-алгебры. Примеры. Свойства.
12. Теорема Гельфанда – Наймарка
13. Самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве
14. Нормальные операторы в гильбертовом пространстве
15. Операторы проектирования.

16. Унитарные операторы.
17. Положительные операторы.
18. Теорема о полиномиальном отображении спектра.
19. Функциональное исчисление самосопряжённых операторов
20. Спектральная теорема для самосопряженного оператора в конечномерном пространстве
21. Неограниченные операторы. Примеры.
22. График неограниченного оператора. Замкнутые операторы.
23. Симметричные операторы.
24. Спектр неограниченного оператора
25. Сопряжённые и самосопряжённые неограниченные операторы
26. Основной критерий самосопряжённости оператора.

Задачи для проведения экзамена

1. Проверить, является ли оператор $T:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ самосопряжённым, положительным, унитарным:

a) $T(x_1, x_2) = (-x_1 - x_2, x_2 - x_1)$.

b) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + x_2)$.

c) $T(x_1, x_2) = (5x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2)$

d) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_2, x_2 - x_3, -x_2 + x_3)$

e) $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_3, -x_2)$

2. Является ли данное подпространство $L \subset E$ замкнутым линейным подпространством, гиперплоскостью, идеалом

a). $L = \{ x \in C[0,1]: \int tx(t)dt = 0 \}$

b). $L = \{ x \in C[-1,1]: x(-1) = x(1) \}$

c). Множество чётных функций в пространстве C[-1,1]

d). Множество всех полиномов в пространстве C[0,1]

e). Множество всех непрерывно дифференцируемых функций в пространстве C[0,1]

f). $L = \{ x \in C[0,1]: x(0) + x(1) = 0 \}$

3. A-банахова алгебра. Для данного элемента $x \in A$ проверить: является ли элемент x регулярным, топологическим делителем нуля. Найти норму и спектральный радиус элемента x.

. a). $\ln(t+1) \in C[0,1]$ в). $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, 0)$, $T \in L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$

c). $t^2 - 3t + 2 \in C[0,2]$ d). $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, 0)$, $T \in L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$

e). $\frac{1}{t+1}$∈C[0,2]   f). T(x_1, x_2, x_3)=($x_1, 0, x_2$), T∈L($\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3$)

g). T(x_1, x_2, x_3)=(0, x_1, x_3), T∈L($\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3$).

4. Пусть $T: H \to H$ линейный оператор в гильбертов пространстве H, $D(T)$ – область определения оператора T. Проверьте,
является ли $D(T)$ плотным линейным подпространством в H,
является ли оператор T неограниченным.

a). $H = \mathcal{L}_2(0, \frac{\pi}{2})$, $Tx(t) = \frac{x(t)}{\sin t}$
$D(T)$ ={$x \in \mathcal{L}_2(0, \frac{\pi}{2})$: $\frac{x(t)}{\sin t} \in \mathcal{L}_2(0, \frac{\pi}{2})$}

b). H=$\mathcal{L}_2(0,1)$, $Tx(t) = \frac{x(t)}{t^2}$
$D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0,1)$: $\frac{x(t)}{t^2} \in \mathcal{L}_2(0,1)$

c). H=$\mathcal{L}_2(0, \infty)$, $Tx(t) = tx(t)$
$D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$: $x(t)e^t \in \mathcal{L}_2(0, \infty)\}$

d). H=$\mathcal{L}_2(0, \infty)$, $Tx(t) = e^t x(t)$
$D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$: $\exists n \in \mathbb{N}$, такое что $x|_{[n, +\infty)} \equiv 0\}$

e). $H = \mathcal{L}_2(0, \frac{\pi}{2})$, $Tx(t) = \frac{x(t)}{\sin t}$
$D(T)$ ={$x \in \mathcal{L}_2(0, \frac{\pi}{2})$: $\exists n \in \mathbb{N}$, такое что $x|_{(0, \frac{1}{n})} \equiv 0\}$

При ответе на два теоретических вопроса и решении дух задач выставляется оценка «отлично». При ответе на три из четырёх вопросов выставляется оценка «хорошо». При ответе на два вопроса – «удовлетворительно». В противном случае – «неудовлетворительно».

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Тест для проверки остаточных знаний

1. Является ли регулярным элемент

a) x(t)=$t^2 - t$ в пространстве C[0,2]
b) T(x_1, x_2, x_3)=(x_2, x_1, x_3) в пространстве L($\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3$).

2. Найти спектр и норму оператора

T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, $2x_2 - 2x_3$, $-2x_2 + 2x_3$), T∈L($\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3$).

3. Является ли идеалом подпространство

. L= { x∈ C[-1,1]: x(-1)=x(1) }

4. Является ли оператор

$\mathrm{T}(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_3, -x_2)$, $\mathrm{T}\in\mathrm{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$

a) самомопряжённым

b) унитарным

c) проектором

5. Является ли оператор H=$\mathcal{L}_2(0,\infty)$,

$Tx(t) = e^t x(t)$ в пространстве H=$\mathcal{L}_2(0,\infty)$, заданный на подпространстве

$D(T) = \{x \in \mathcal{L}_2(0,\infty)\colon \exists n \in \mathbb{N},\ \text{такое что}\ x|_{[n,+\infty)} \equiv 0\}$

a) плотно определённым

b) неограниченным

6) Может ли быть замкнутым график неограниченного оператора?

Ключи

1. a) Нет b) Да
2. $\sigma(T) = \{0; 4\}$, $||T|| = 4$
3. Да
4. a) Да b) Да c) Нет
5. a) Да b) Да
6. Да

Информация о разработчиках

Хмылёва Татьяна Евгеньевна, канд. физ.-мат. наук, доцент, ММФ ТГУ, доцент