Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Функциональный анализ

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– индивидуальные задания;

Примеры индивидуальных заданий:

Индивидульное задание № 1(ИОПК-1.1 и ИОПК-1.3)

Сходится ли данная последовательность функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в каждом из пространств $C[0,1]$, $L_1(0,1)$ и $L_2(0,1)$? Если сходится, то найдите предельную функцию.

1а) $x_n(t) = \sin\dfrac{(n-1)\,t}{n}$;

1б) $x_n(t) = \dfrac{t^2+n}{t^2+n^2+1}$.

2а) $x_n(t) = n\sin\dfrac{t}{n}$;

2б) $x_n(t) = \dfrac{n}{nt+1}$.

3а) $x_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+\frac{1}{n}}} + \sin\dfrac{t}{n}$;

3б) $x_n(t) = t^{n+\sqrt{n}} - t^n$.

4а) $x_n(t) = e^{-t/\sqrt{n}}$;

4б) $x_n(t) = \dfrac{n^2t^2}{n^4t^4+1}$.

5а) $x_n(t) = \dfrac{\ln(t^2+n^2)}{n}$;

5б) $x_n(t) = \dfrac{n^2t}{n^4t^4+1}$.

6а) $x_n(t) = \dfrac{\ln(nt+1)}{n}$;

6б) $x_n(t) = \dfrac{nt}{n^3t^3+1}$.

7а) $x_n(t) = \dfrac{\ln(t+n)}{\ln(t+2n)}$;

7б) $x_n(t) = \dfrac{t+n}{n^2t^2+1}$.

8а) $x_n(t) = \dfrac{\ln(nt+n^2)}{t+n^2}$;

8б) $x_n(t) = \dfrac{t^2+n^2}{n^2t^2+1}$.

9а) $x_n(t) = n\operatorname{tg}\dfrac{t}{n}$;

9б) $x_n(t) = \dfrac{t+n}{t+n+1}$.

10а) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{t+n}}$;

10б) $x_n(t) = \sqrt{\dfrac{t}{n}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{t+\frac{1}{n}}}$.

Индивидуальное задание № 2(ИОПК-1.1 и ИОПК-1.2)

Является ли данный функционал ограниченным на каждом из пространств c_0, и l_2? В случае ограниченности найдите его норму.

1а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{10} nx_n$;

1б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n+1}$.

2а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{100} (-1)^n x_n$;

2б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{1}{n}\, x_n$.

3а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{20} (1-(-1)^n)\, x_n$;

3б) $f(x) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{x_n}{(n-2)(n+2)}$.

4а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{10} (-1)^n n x_n$;

4б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n+3}}$.

5а) $f(x) = x_1 + 4x_3 - 3x_4$;

5б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_{n+1}}{\ln(n+1)}$.

6а) $f(x) = \dfrac{x_1}{4} - \dfrac{x_2}{3} + \dfrac{x_3}{2}$;

6б) $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x_n}{n\ln n}$.

7а) $f(x) = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{10}}{10}$;

7б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}\ln 2n}$.

Индивидуальное задание № 3 (ИОПК-1.1 и ИОПК-1.3)

Пусть $L \subset l_p^2$ — линейное одномерное подпространство и $f\colon L \to \mathbb{R}$ — линейный функционал. Постройте его линейное продолжение $\tilde{f}\colon l_p^2 \to \mathbb{R}$ с сохранением нормы для $p = 1$, $p = 2$ и $p = \infty$.

1) $L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid y - x = 0\}$, $\quad f(x, y) = x + 2y$.

2) $L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid y - 2x = 0\}$, $\quad f(x, y) = 5x + 5y$.

3) $L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid x + y = 0\}$, $\quad f(x, y) = 4x - 2y$.

4) $L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid 2y + x = 0\}$, $\quad f(x, y) = 10y - 5x$.

5) $L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid 2y - x = 0\}$, $\quad f(x, y) = x - y$.

6) $L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid y + 2x = 0\}$, $\quad f(x, y) = x$.

7) $L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid 3x + 4y = 0\}$, $\quad f(x, y) = 5x - 10y$.

8) $L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid 3x + y = 0\}$, $\quad f(x, y) = y - 2x$.

9) $L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid x - 3y = 0\}$, $\quad f(x, y) = x + y$.

10) $L = \{(x, y) \in l_p^2 \mid 3x - y = 0\}$, $\quad f(x, y) = 3x + 2y$.

Индивидуальное задание № 4 (ИОПК-1.1 и ИОПК-1.3)

Будет ли данная последовательность функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактной в пространстве $C[0, 1]$?

1а) $x_n(t) = \sin \dfrac{(n-1)\,t}{n}$;

1б) $x_n(t) = \dfrac{t^2 + n}{t^2 + n^2 + 1}$.

2а) $x_n(t) = n \sin \dfrac{t}{n}$;

2б) $x_n(t) = \dfrac{n}{nt + 1}$.

3а) $x_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t + \frac{1}{n}}} + \sin \dfrac{t}{n}$;

3б) $x_n(t) = t^{n + \sqrt{n}} - t^n$.

4а) $x_n(t) = e^{-t/\sqrt{n}}$;

4б) $x_n(t) = \dfrac{n^2 t^2}{n^4 t^4 + 1}$.

5а) $x_n(t) = \dfrac{\ln(t^2 + n^2)}{n}$;

5б) $x_n(t) = \dfrac{n^2 t}{n^4 t^4 + 1}$.

6а) $x_n(t) = \dfrac{\ln(nt + 1)}{n}$;

6б) $x_n(t) = \dfrac{nt}{n^3 t^3 + 1}$.

7а) $x_n(t) = \dfrac{\ln(t + n)}{\ln(t + 2n)}$;

7б) $x_n(t) = \dfrac{t + n}{n^2 t^2 + 1}$.

Индивидуальное задание № 5 (ИОПК-1.1 и ИОПК-1.2)

Пусть T — оператор, действующий а) из $\mathbb{C}^4$ в $\mathbb{C}^4$; б) из l_2 в l_2; в) из $L_2(0,1)$ в $L_2(0,1)$.

Найдите сопряженный оператор T^*.

1а) $T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_4-x_1,0,x_2,x_3+x_4)$;

1б) $T(x_1,x_2,\ldots)=(x_1+x_{11},x_2+x_{13},x_3+x_{15},x_4+x_{17},\ldots)$;

1в) $Tx(t)=\int\limits_0^1 t\,x(s^2)\,ds$.

2а) $T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_3-x_4,x_3+x_4,x_2+x_3,x_2-x_3)$.

2б) $T(x_1,x_2,\ldots)=(x_1+x_2+\ldots+x_{10},x_2,x_3,x_4,\ldots)$;

2в) $Tx(t)=\int\limits_0^1 \sqrt{t}\,x(\sqrt{s})\,ds$.

3а) $T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2+x_3-x_4,x_2,x_3,x_4-x_1)$.

3б) $T(x_1,x_2,\ldots)=(x_1,x_3,x_3,x_5,x_5,x_7,x_7,\ldots)$;

3в) $Tx(t)=\int\limits_0^1 t^{1/3}\,x(s^2)\,ds$.

4а) $T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_4,x_2+x_3,x_3-x_1,x_1+x_4)$.

4б) $T(x_1,x_2,\ldots)=(x_1,x_2,x_2,x_1,x_5,x_6,x_6,x_5,\ldots)$;

4в) $Tx(t)=\int\limits_0^1 t\,x(\sqrt{s})\,ds$.

5а) $T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2,x_2-x_3,x_3-x_4,x_4-x_1)$.

5б) $T(x_1,x_2,\ldots)=(-x_2,x_1,-x_4,x_3,-x_6,x_5,\ldots)$;

5в) $Tx(t)=\int\limits_0^1 \sqrt{t}\,x(s^2)\,ds$.

6а) $T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_4,x_2+x_3,x_3-x_2,x_3)$.

6б) $T(x_1,x_2,\ldots)=(-x_1,x_2,-x_3,x_4,\ldots)$;

6в) $Tx(t)=\int\limits_0^t s\,x(s)\,ds$.

Критерии оценивания индивидуального задания: индивидуальное задание считается выполненным, если оно решено полностью верно, возможно с помощью преподавателя.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из трех частей.

Первая часть и вторая часть представляет собой теоретические вопросы, проверяющие ИОПК 1.1 и ИОПК 1.3. Ответы на вопросы первой части даются путем выбора из списка предложенных.

Третья часть содержит практическое задание, проверяющее ИОПК 1.2. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Перечень теоретических вопросов:

1. Определение нормированного пространства. Свойства нормы. Примеры нормированных пространств.
2. Неравенства Гёльдера и Минковского.
3. Определение линейного оператора. Свойства. Теорема о равносильности ограниченности и непрерывности линейного оператора.
4. Примеры ограниченных и неограниченных линейных операторов. Непрерывность оператора Фредгольма.
5. Пространство линейных операторов. Его полнота.
6. Теорема Бэра. Принцип равномерной ограниченности.
7. Изоморфизмы и изометрии. Изоморфизм всех конечномерных пространств одной размерности. Следствия.
8. Лемма о почти перпендикуляре. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
9. Естественная изометрия. Свойства. Признак ограниченности множества.
10. Сопряженные операторы. Свойства.
11. Линейные ограниченные функционалы. Примеры ограниченных и неограниченных линейных функционалов. Связь с гиперплоскостями.
12. Общий вид функционалов в пространствах $l_{\infty},\ l_p\ \ p\geq 1\ ,\ c_0$.
13. Теорема Хана-Банаха. Аналитическая форма.
14. Теорема Хана-Банаха для нормированных пространств.
15. Следствия из теоремы Хана-Банаха.
16. Функционал Минковского и его свойства.
17. Геометрическая форма теоремы Хана-Банаха.
18. Вполне непрерывные операторы. Теорема о сумме и предельном переходе. Свойства. Примеры. Вполне непрерывность оператора Фредгольма в $C\ \ a,b$.
19. Вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром в пространстве $L_2\ \ a,b$.
20. Теорема Хаусдорфа.
21. Теорема Арцела-Асколи.
22. Выпуклые множества и их свойства.
23. Принцип открытости отображения. Теорема Банаха об обратном операторе.
24. График линейного оператора. Его свойства. Теорема о замкнутом графике.
25. Конечномерные операторы. Теорема об общем виде конечномерного оператора.
26. Гильбертовы пространства. Примеры. Свойства.
27. Теорема о наилучшем приближении. Теорема о проекции. Следствия.
28. Ортонормированные системы. Примеры. Теореме Пифагора. Метод ортогонализации Шмидта.
29. Общий вид функционала в гильбертовом пространстве.
30. Ряды Фурье. Экстремальное свойство многочлена Фурье. Неравенство Бесселя.
31. Полные и замкнутые ортонормированные системы. Сходимость ряда Фурье.
32. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Примеры. Свойства. Теорема о существовании оператора T^*.
33. Самосопряженные операторы. Теорема о норме. Свойства.
34. Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве. Вполне непрерывность оператора T^*. Теорема об аппроксимации.
35. Конечномерные операторы в гильбертовом пространстве.
36. Изоморфизм всех бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств.
37. Теорема Стоуна-Вейерштрасса для вещественного и комплексного случая. Примеры.

Примеры задач:

Задача № 1

Пусть $T: l_2 \to l_2$, $T\ x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\ = 0, 0, x_1, x_2, \ldots x_n, 0, 0, \ldots$. Найдите T^*.

Задача № 2

Найдите скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ векторов $x = (i, -1, 3+i, 3)$ и $y = (i, -2, -i, i)$ в пространстве $\mathbb{C}^4$.

Задача № 3

Найдите все собственные векторы оператора $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T\ x_1, x_2, x_3, x_4\ = x_4, x_1, x_2, x_2$.

Задача № 4

Найдите все собственные векторы оператора $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T\ x_1, x_2, x_3, x_4\ = -x_2, x_1, x_3 + x_4, 0$.

Задача № 5

Найдите все собственные векторы оператора $T: L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$, заданного формулой $Tx(t) = \int_{-1}^{1} (1+ts)x(s)\,ds$.

Задача № 6

Найдите все собственные векторы оператора $T: L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$, заданного формулой $Tx(t) = \int_{-1}^{1} (3ts + 5t^2s^2)x(s)\,ds$.

Задача № 7

Решить уравнение Фредгольма

$$x(t) = \int_{-1}^{1} (3ts + 5t^2s^2)x(s)\,ds + t.$$

Задача № 8

Является ли вполне непрерывным оператор $Tx(t) = x(t^2)$ в пространстве C[-1,1].

Задача № 9

Будет ли ограниченным функционал $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$, если

а) $x \in l_1$;

б) $x \in l_2$.

Если функционал ограничен, то найдите его норму.

Задача № 10

Является ли вполне непрерывным оператор $T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3 \ldots, x_n, \ldots)$ в пространстве c_0.

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные и развернутые ответы на два вопроса и задача решена верно.

Оценка «хорошо» выставляется, если дан правильный ответ на вопросы, но доказательства содержат неточности или не полностью изложены. Задача решена правильно или ход решения правильный, но содержит вычислительную ошибку.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если в целом дан правильный ответ, но изложен поверхностно и с нарушением логики изложения. Задача решена правильно или ход решения правильный, но содержит вычислительную ошибку

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если ответ представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения. Студент плохо владеет основными понятиями и концепциями функционального анализа. Допущены существенные терминологические и фактические ошибки. Задача решена неправильно

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы для проверки остаточных знаний представлены в виде тестов.

Вариант 1 (ИОПК-1.1 и ИОПК-1.2)

1. Каким из нормированных пространств c_0 c, l_1, принадлежит данная последовательность?
   a. $(n+1)^{-2} \ {}_{n=1}^{\infty}$;
   b. $\left\{\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
2. Найдите норму элемента $x=\cos t$ в пространстве $L_1(0,\pi)$.
   a. 0.
   b. 2.
   c. 1.
3. Укажите предел $h(t)$ данной последовательности функций $\varphi_n :\ -1,1 \to \mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$, в пространстве $C\ -1,1$, где $\varphi_n\ \ t\ \ = t\cos^2\dfrac{t}{n}$.
   a. $h(t)\equiv 1$.
   b. $h(t)=t$.
   c. $h(t)=t^2$.
4. Сопряжённым к данному оператору, $T: l_2 \to l_2$, $T\ \ x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\ = \ 0, 0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ является оператор:
   a. $S\ \ y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\ = \ 0, 0, y_3, y_4, \ldots, y_n, \ldots$.
   b. $S\ \ y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\ = \ y_3, y_4, \ldots, y_n, \ldots$.
5. Среди следующих пар векторов выберите ортогональные:
   a. $x, y \in \mathbb{C}^4$. $x=(1, i, -1, 4)$, $y=(i, 1, 2, 1/2)$.
   b. $x, y\in \ell_2$. $x=\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $y=\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

6. Какой из векторов является собственным вектором оператора $T:\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T\ \ x_1,x_2,x_3,x_4\ \ =\ \ x_4,x_1,x_2,x_3$.
   a. $(-2, 2, -2, 2)$.
   b. $(1, 0, 1, 0)$.

Вариант 2 ИОПК-1.1 и ИОПК-1.2)

1. Каким из нормированных пространств c_0, c, l_1, принадлежит данная последовательность?
   a. $\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$;
   b. $\left\{\sin\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
2. Найдите норму элемента $x = t^2 - t$ в пространстве $L_1(-1,1)$.
   a. 1.
   b. 2/3.
   c. 1/6.
3. Укажите предел $h(t)$ данной последовательности функций $\varphi_n :\ \ -1,1 \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$ в пространстве $C\ \ -1,1$, где $\varphi_n\ \ t\ \ = nt \arcsin\dfrac{t}{n}$.
   a. $h(t) \equiv 1$.
   b. $h(t) = t$.
   c. $h(t) = t^2$.
4. Сопряжённым к данному оператору, $T:l_2 \to l_2$,
   $T\ \ x_1,x_2,\ldots x_n,\ldots\ \ =\ \ 0,0,x_1,x_2,\ldots x_n,0,0,\ldots$ является оператор:
   a. $S\ \ y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots\ \ =\ \ y_3,y_4,\ldots,y_{n+2},0,0,\ldots$.
   b. $S\ \ y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots\ \ =\ \ 0,0,y_3,y_4,\ldots,y_{n+2},0,0,\ldots$.
5. Среди следующих пар векторов выберите ортогональные:
   a. $x,y \in \mathbb{C}^4$. $x = (1, i, -3, 4),\ y = (1, -i, 24, 18)$.
   b. $x,y \in L_2(-1,1)$. $x(t) = e^{t+1},\ y(t) = t+1$.
6. Какой из векторов является собственным вектором оператора $T:\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T\ \ x_1,x_2,x_3,x_4\ \ =\ \ x_4,x_1,x_2,x_2$.
   a. $(0, 0, i, 0)$.
   b. $(1, 1, 0, 0)$.

Вариант 3 (<u>ИОПК-1.1 и ИОПК-1.2</u>)

1. Каким из нормированных пространств c_0, c, l_1, принадлежит данная последовательность?
   a. $\left\{\frac{\operatorname{arctg} n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$;
   b. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
2. Найдите норму элемента $x = |t| - 1/2$ в пространстве $L_1(-1,1)$.
   a. 1.
   b. 0.
   c. 1/2.
3. Укажите предел $h(t)$ данной последовательности функций $\varphi_n : \ -1,1 \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C \ -1,1$, где $\varphi_n \ t \ = t \cos \frac{t}{n}$.
   a. $h(t) \equiv 1$.
   b. $h(t) = t$.
   c. $h(t) = t^2$.
4. Сопряжённым к данному оператору, $T : l_2 \to l_2$,
   $T \ x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots \ = \ 0, x_1, 0, x_2, \ldots 0, x_n, \ldots$ является оператор:
   a. $S \ y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \ = \ y_2, y_4, \ldots, y_{2n}, \ldots$.
   b. $S \ y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \ = \ y_2, 0, y_4, 0, \ldots, y_{2n}, 0, \ldots$.
5. Среди следующих пар векторов выберите ортогональные:
   a. $x, y \in \mathbb{C}^4$. $x = (1, i, 14, 7)$, $y = (i, -1, 4, -8)$.
   b. $x, y \in L_2(-1,1)$. $x(t) = \sqrt{3}t - i$, $y(t) = \sqrt{3}t + i$.
6. Какой из векторов является собственным вектором оператора $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T \ x_1, x_2, x_3, x_4 \ = \ x_1, x_3, x_2, x_4$.
   a. $(1, 3, -3, 0)$.
   b. $(0, -i, i, 0)$.

Вариант 4 (<u>ИОПК-1.1 и ИОПК-1.2</u>)

1. Каким из нормированных пространств c_0, c, l_1, принадлежит данная последовательность?
   a. $\left\{n \sin \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;
   b. $\left\{\frac{n^2}{n^4+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
2. Найдите норму элемента $x = 3t - 1$ в пространстве $L_1(-1,1)$.
   a. 10/3.
   b. -2.
   c. 2.

3. Укажите предел $h(t)$ данной последовательности функций $\varphi_n: [-1,1] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C[-1,1]$, где $\varphi_n(t) = \left|1 - t^3 \ln \frac{n+1}{n}\right|$.
   a. $h(t) \equiv 1$.
   b. $h(t) = t$.
   c. $h(t) = t^2$.
4. Сопряжённым к данному оператору, $T: L_2(0,\pi) \to L_2(0,\pi)$, $Tx(t) = \int_0^{\pi} e^{ts} x(s)\,ds$ является оператор:
   a. $Sy(t) = \int_0^{\pi} e^{-its} y(s)\,ds$.
   b. $Sy(t) = \int_0^{\pi} e^{ts} y(s)\,ds$.
5. Среди следующих пар векторов выберите ортогональные:
   a. $x, y \in \ell_2$. $x = \left\{\frac{1}{(n-1)!}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
   b. $x, y \in \mathbb{C}^4$. $x = (1-i, i, 12, -16)$, $y = (1-i, -2i, 12, 9)$.
6. Какой из векторов является собственным вектором оператора $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_2, 4x_1, x_1)$.
   a. $(0, -i, 0, 0)$.
   b. $(1, i, 4, 1)$.

Вариант 5 (ИОПК-1.1 и ИОПК-1.2)

1. Каким из нормированных пространств c_0, c, l_1, принадлежит данная последовательность?
   a. $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$;
   b. $\left\{\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
2. Найдите норму элемента $x = t^3 - 1$ в пространстве $L_1(0,2)$.
   a. 4.
   b. 6.
   c. 7/2.
3. Укажите предел $h(t)$ данной последовательности функций $\varphi_n: [-1,1] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C[-1,1]$, где $\varphi_n(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t e^{-n}\right)$.
   a. $h(t) \equiv 1$.
   b. $h(t) = t$.
   c. $h(t) = t^2$.
4. Сопряжённым к данному оператору, $T: l_2 \to l_2$,
   $T(x_1, x_2, \dots x_n, \dots) = (x_1, 0, x_3, \dots 0, x_{2n-1}, \dots)$ является оператор:

a. $S\ \ y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\ = y_2, 0, y_4, 0, \ldots, y_{2n}, 0, \ldots\ .$

b. $S\ \ y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\ = y_1, 0, y_3, 0, \ldots, y_{2n-1}, 0, \ldots\ .$

5. Среди следующих пар векторов выберите ортогональные:

a. $x, y \in \ell_2.\quad x = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty},\ y = \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}.$

b. $x, y \in \mathbb{C}^4.\quad x = (1+i, i, 1, 2i),\ y = (1-i, -3, i, 1).$

6. Какой из векторов является собственным вектором оператора $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, заданного формулой $T\ \ x_1, x_2, x_3, x_4\ = x_1 + x_3, 2x_2 + x_4, 0, 0\ .$

a. $(-1, 2, 1, -4).$

b. $(0, 2i, 0, -i).$

Ответы к тестам.

Вариант 1

1		2	3	4	5	6
a) c_0, c, l_1	b) c_0, c	b	b	b	a	a

Вариант 2

1		2	3	4	5	6
a) c_0, c	b) c_0, c, l_1	a	c	a	a	a

Вариант 3

1		2	3	4	5	6
a) c_0, c	b) c	c	b	a	b	b

Вариант 4

1		2	3	4	5	6
a) c	b) c_0, c, l_1	a	a	b	b	a

Вариант 5

1		2	3	4	5	6
a) c_0, c	b) c_0, c	c	a	b	b	a

Информация о разработчиках

Хмылева Татьяна Евгеньевна, к.-т физ.мат. наук, доцент, кафедра математического анализа и теории функций ММФ