Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДЕНО:
Декан ММФ ТГУ
Л.В.Гензе

Оценочные материалы по дисциплине

Дополнительные главы функционального анализа

по направлению подготовки

01.03.01 Математика

Направленность (профиль) подготовки
Основы научно-исследовательской деятельности в области математики

Форма обучения
Очная

Квалификация
Бакалавр

Год приема
2023

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Л.В.Гензе

Председатель УМК
Е.А.Тарасов

Томск – 2023

1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики как для использования в профессиональной деятельности, так и для консультирования.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Демонстрирует навыки работы с профессиональной литературой по основным естественнонаучным и математическим дисциплинам

ИОПК 1.2 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин

ИОПК 1.3 Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания

Элементы текущего контроля:

– индивидуальные задания;

Примеры индивидуальных заданий:

Индивидульное задание № 1(ИОПК-1.1 и ИОПК-1.2)

Пусть $T\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ — линейный оператор. Найдите все собственные числа и соответствующие им собственные векторы оператора T.

1) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4 - x_1, 0, x_2, x_3 + x_4)$.

2) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 - x_4, x_3 + x_4, x_2 + x_3, x_2 - x_3)$.

3) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4 - x_1)$.

4) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_4, x_2 + x_3, x_3 - x_1, x_1 + x_4)$.

5) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1)$.

6) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, x_2 + x_3, x_3 - x_2, x_3)$.

7) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_1 + x_2, x_1)$.

8) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 0, x_2 + x_3 + x_4, x_2 - x_3)$.

9) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_2, x_1 + x_2, x_3 - x_2, x_4 - x_3)$.

10) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, x_2 + x_3, 0, x_1 + x_4)$.

Индивидульное задание № 2 (ИОПК-1.1 и ИОПК-1.2)

Спектр оператора Фредгольма с вырожденным ядром

1а) $Tx(t) = \int\limits_0^{\pi} \sin(t+s)\, x(s)\, ds\,;$

2а) $Tx(t) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t-s)\, x(s)\, ds\,;$

3а) $Tx(t) = \int\limits_0^{2\pi} \sin(t+s)\, x(s)\, ds\,;$

4а) $Tx(t) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t+s)\, x(s)\, ds\,;$

5а) $Tx(t) = \int\limits_0^{\pi} \cos(t-s)\, x(s)\, ds\,;$

6а) $Tx(t) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos(t-s)\, x(s)\, ds\,;$

7а) $Tx(t) = \int\limits_0^{\pi} \sin(t+2s)\, x(s)\, ds\,;$

8а) $Tx(t) = \int\limits_0^{\pi} \sin(t-2s)\, x(s)\, ds\,;$

9а) $Tx(t) = \int\limits_0^{\pi} \cos(t-2s)\, x(s)\, ds\,;$

10а) $Tx(t) = \int\limits_0^{\pi} \cos(t+2s)\, x(s)\, ds\,;$

1б) $Tx(t) = \int\limits_{-1}^{1} ts(t+s)\, x(s)\, ds.$

2б) $Tx(t) = \int\limits_{-1}^{1} ts(1+ts)\, x(s)\, ds.$

3б) $Tx(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1+ts}{1+s^2}\, x(s)\, ds.$

4б) $Tx(t) = \int\limits_{-1}^{1} (\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{s}\,)\, x(s)\, ds.$

5б) $Tx(t) = \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2 + \frac{t+s}{2}\right) x(s)\, ds.$

6б) $Tx(t) = \int\limits_{-1}^{1} ts(3-ts)\, x(s)\, ds.$

7б) $Tx(t) = \int\limits_{-1}^{1} ts(5ts-3)\, x(s)\, ds.$

8б) $Tx(t) = \int\limits_0^{1} \left(ts - \frac{1}{3}\right) x(s)\, ds.$

9б) $Tx(t) = \int\limits_0^{1} (t+s-2ts)\, x(s)\, ds.$

10б) $Tx(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^2(s^2+5ts)\, x(s)\, ds.$

Индивидульное задание № 3 (ИОПК-1.1 и ИОПК-1.3)

Найдите спектр оператора Фредгольма $T: L_2(a,b) \to L_2(a,b)$, заданного формулой

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds.$$

1) $[a,b] = [0,\pi]$ и $K(t,s) = \begin{cases} t, & \text{если } t \leqslant s, \\ s, & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$

2) $[a,b] = [-\pi,0]$ и $K(t,s) = \begin{cases} s, & \text{если } t \leqslant s, \\ t, & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$

3) $[a,b] = [0,\pi/2]$ и $K(t,s) = \min\{t,s\}$.

4) $[a,b] = [-\pi/2,0]$ и $K(t,s) = \max\{t,s\}$.

5) $[a,b] = [0,1]$ и $K(t,s) = \begin{cases} t, & \text{если } t \leqslant s, \\ s, & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$

6) $[a,b] = [-1,0]$ и $K(t,s) = \begin{cases} s, & \text{если } t \leqslant s, \\ t, & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$

7) $[a,b] = [-1,1]$ и $K(t,s) = \begin{cases} (1+t)\cdot(1-s), & \text{если } t \leqslant s, \\ (1-t)\cdot(1+s), & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$

8) $[a,b] = [0,1]$ и $K(t,s) = \begin{cases} \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch}(s-1), & \text{если } t \leqslant s, \\ \operatorname{sh} s \cdot \operatorname{ch}(t-1), & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$

9) $[a,b] = [0,2]$ и $K(t,s) = \begin{cases} t\cdot(s-2), & \text{если } t \leqslant s, \\ s\cdot(t-2), & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$

10) $[a,b] = [-1,0]$ и $K(t,s) = \begin{cases} s\cdot(t+1), & \text{если } t \leqslant s, \\ t\cdot(s+1), & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$

Индивидульное задание № 4 (ИОПК-1.1 и ИОПК-1.3)

Уравнения Фредгольма. Формулы Гильберта – Шмидта

Применяя формулы Гильберта – Шмидта, решите уравнение Фредгольма

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t)$$

для каждого из данных значений μ.

	μ	$[a,b]$	$K(t,s)$	$f(t)$
1)	$\{1, 1/4, 9/4\}$	$[0,\pi]$	$\begin{cases} t, & \text{если } t \leqslant s, \\ s, & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$	$\sin 2t \cdot \cos \frac{t}{2}$
2)	$\{2, -1/4, -25/4\}$	$[-\pi,0]$	$\begin{cases} s, & \text{если } t \leqslant s, \\ t, & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$	$\sin \frac{t}{2}$
3)	$\{1, 4, 9\}$	$[0,\pi/2]$	$\min\{t,s\}$	$\sin 3t$

4)	$\{1, -1, -25\}$	$[-\pi/2, 0]$	$\max\{t, s\}$	$\sin 2t \cdot \cos t$
5)	$\{\pi^2, \pi^2/4, 25\pi^2/4\}$	$[0, 1]$	$\begin{cases} t, & \text{если } t \leqslant s, \\ s, & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$	$\sin \frac{5\pi t}{2}$
6)	$\{\pi/4, -\pi^2/4, -9\pi^2/4\}$	$[-1, 0]$	$\begin{cases} s, & \text{если } t \leqslant s, \\ t, & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$	$\sin \frac{\pi t}{2}$
7)	$\{1, \pi^2/8, 2\pi^2\}$	$[-1, 1]$	$\begin{cases} (1+t)\cdot(1-s), & \text{если } t \leqslant s, \\ (1-t)\cdot(1+s), & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$	$\sin 2\pi t$
8)	$\left\{\frac{1}{4\,\mathrm{ch}\,1}, \frac{\pi^2+4}{4\,\mathrm{ch}\,1}, \frac{9\pi^2+4}{4\,\mathrm{ch}\,1}\right\}$	$[0, 1]$	$\begin{cases} \mathrm{sh}\,t \cdot \mathrm{ch}(s-1), & \text{если } t \leqslant s, \\ \mathrm{sh}\,s \cdot \mathrm{ch}(t-1), & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$	$\sin \frac{3\pi t}{2}$
9)	$\{\pi^2/8, -\pi^2/8, -\pi^2/2\}$	$[0, 2]$	$\begin{cases} t\cdot(s-2), & \text{если } t \leqslant s, \\ s\cdot(t-2), & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$	$\sin \pi t \cdot \cos^2 \pi t$
10)	$\{4\pi^2, -4\pi^2, -9\pi^2\}$	$[-1, 0]$	$\begin{cases} s\cdot(t+1), & \text{если } t \leqslant s, \\ t\cdot(s+1), & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$	$\sin 2\pi t$

Индивидульное задание № 5 (ИОПК-1.1 и ИОПК-1.3)

Исследовать последовательность функций на сходимость по мере, почти всюду, равномерную и почти равномерную на промежутках $(0, +\infty)$ и [0,1].

1. $x_n(t) = \frac{2nt}{t^2+n^2}$;
2. $x_n(t) = e^{-|t-n|}$;
3. $x_n(t) = e^{-(nt-1)^2}$;
4. $x_n(t) = arctg\frac{t}{n}$;
5. $x_n(t) = e^{t^2-n^2}$;
6. $x_n(t)=\begin{cases} [t], t\in[-n;n] \\ -n, t\in(-\infty;-n) \\ n, t\in(n;+\infty) \end{cases}$ a) t∈[-1;1], b) t∈(-∞;+∞)
7. $x_n(t)=\frac{1}{n}\chi_{[n;n+\sqrt{n}]}$ a) t∈[-1;1], b) t∈(-∞;+∞)
8. $x_n(t)=\sqrt{n}\chi_{\left[n;n+\frac{1}{n}\right]}$ a) t∈[-1;1], b) t∈(-∞;+∞)
9. $x_n(t)=n\chi_{\left[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right]}$ a) t∈[-1;1], b) t∈(-∞;+∞)
10. a) t∈[-1;1], b) t∈(-∞;+∞)
$x_n(t) = e^{\frac{1}{nt+1}}$;

Критерии оценивания: индивидуальное задание считается выполненным, если получен верный ответ, возможно допустить вычислительные ошибки.

3. Оценочные материалы итогового контроля (промежуточной аттестации) и критерии оценивания

Экзаменационный билет состоит из трех частей.

Первая часть и вторая часть представляет собой теоретические вопросы, проверяющие ИОПК 1.1 и ИОПК 1.3. Ответы на вопросы первой части даются путем выбора из списка предложенных.

Третья часть содержит практическое задание, проверяющее ИОПК 1.2. Ответы на вопросы третьей части предполагают решение задач и краткую интерпретацию полученных результатов.

Вопросы к экзамену:

1. Определение и свойства спектра.
2. Теорема о непустоте спектра.
3. Связь между спектрами оператора T и $T.^*$
4. Вещественный спектр самосопряженного оператора.
5. Спектр вполне непрерывного оператора. Теорема 1 и Теорема 2.
6. Теорема о замкнутости образа оператора $\lambda I - T$, где T – вполне непрерывный оператор.
7. Теорема $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$, где T – вполне непрерывный оператор.
8. Теорема о строении спектра вполне непрерывного оператора.
9. Уравнение Рисса-Шаудера. Теорема Фредгольма.
10. Теорема о неподвижной точке. Уравнение Вольтерра.
11. Теорема о полиномиальном отображении спектра.
12. Функции ограниченной вариации. Свойства.Теорема Жордана. Непрерывность функции V(t).
13. Интеграл Стилтьеса. Свойства, Примеры. Интегрируемость непрерывных функций.
14. Общий вид функционала на C[a,b].
15. Определение полукольца, кольца. алгебры. Кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{E})$.
16. Мера на кольце $\mathcal{R}(\mathcal{E})$. Свойства меры на кольце.
17. Теорема Лебега о продолжении меры.
18. Свойства меры $\mu*$.
19. Сходимость последовательностей измеримых функций.
20. Теорема Егорова.
21. Теорема Лузина.
22. Меры на прямой. Счётная аддитивность меры.
23. Регулярные меры.
24. Обобщённые меры. Теорема Хана. теорема Жордана.
25. Абсолютно непрерывные меры. Теорема Радона-Никодима.
26. Разложение меры в смысле Лебега.
27. Абсолютно непрерывные функции. Равносильные определения. Связь с абсолютно непрерывными мерами.

Примеры задач.

Задача № 1

Найти спектр оператора:

1) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4 - x_1, 0, x_2, x_3 + x_4).$

Задача № 2

Найти спектр оператора:

$$Tx(t) = \int_0^{\pi} \sin(t - 2s)\, x(s)\, ds\,;$$

Задача № 3

Найти спектр оператора:

$$T: C[-1,1] \to C[-1,1], \qquad Tx(t) = x(0)t + x(1).$$

Задача № 4

Найти спектр оператора:

$$T: C[-1,1] \to C[-1,1], \qquad Tx(t) = sin\pi t \cdot x(t).$$

Задача № 5

При каких значениях параметра μ уравнение $x(t) = \mu \int_{-1}^{1} (ts + t^2) x(s) ds + 1$

имеет единственное решение.

Задача № 6

При каких значениях параметра μ уравнение $x(t) = \mu \int_0^{\pi} \sin(2t + s) x(s) ds + cos2t$

имеет единственное решение.

Задача № 7

Исследовать последовательность функций на сходимость по мере, почти всюду, равномерную и почти равномерную на промежутках $(0, +\infty)$ и $[0,1]$

$$x_n(t) = \frac{n^2t^2 + nt + 1}{n^2t + 1}.$$

Задача № 9

Исследовать последовательность функций на сходимость по мере, почти всюду, равномерную и почти равномерную на промежутках $(0, +\infty)$ и $[0,1]$

$$x_n(t) = e^{-nt^2}\,;$$

Задача № 10

Исследовать последовательность функций на сходимость по мере, почти всюду, равномерную и почти равномерную на промежутках $(0, +\infty)$ и $[0,1]$

x_n(t)=|nt-1|-|nt+1|

Критерии оценивания:

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные и развернутые ответы на два вопроса и задача решена верно.

Оценка «хорошо» выставляется, если дан правильный ответ на вопросы, но доказательства содержат неточности или не полностью изложены. Задача решена правильно или ход решения правильный, но содержит вычислительную ошибку.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если в целом дан правильный ответ, но изложен поверхностно и с нарушением логики изложения. Задача решена правильно или ход решения правильный, но содержит вычислительную ошибку

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если ответ представлен очень поверхностно и с нарушением логики изложения. Студент плохо владеет основными понятиями и концепциями функционального анализа. Допущены существенные терминологические и фактические ошибки. Задача решена неправильно

4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

Оценочные материалы для проверки остаточных знаний представлены в виде тестов.

Тест 1.

1. Найти спектр оператора $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1)$$

2. Найти спектр оператора $T: \mathcal{L}_2(0,\pi) \to \mathcal{L}_2(0,\pi)$

$$Tx(t) = \int_0^\pi \cos(t-s)\, x(s)\, ds\,;$$

3. Для всех значений параметра решить уравнение Фредгольма с вырожденным ядром

$$\text{a) } x(t) = \mu \int_0^\pi \cos(t-s)\, x(s)\, ds + \cos t;$$

4. Решить уравнение Фредгольма

$$x(t) = 2\int_0^{\pi/2} K(t,s)\, x(s)\, ds + \cos 2t, \quad \text{где } K(t,s) = \begin{cases} \sin t \cdot \cos s, & \text{если } t \leqslant s, \\ \sin s \cdot \cos t, & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$$

5. Исследовать последовательности функций на сходимость по мере, почти равномерную сходимость, поточечную сходимость и сходимость почти всюду.

$$x_n(t) = \frac{nt}{nt^2+1}.$$

a) $t \in [0;1]$, b) $t \in [1;+\infty)$

Тест 2.

1. Найти спектр оператора $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4, 2x_1 - x_2 + x_3, 0, 0).$$

2. Найти спектр оператора $T\colon \mathcal{L}_2(0,\pi) \to \mathcal{L}_2(0,\pi)$

$$Tx(t) = \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2 + \frac{t+s}{2}\right) x(s)\, ds.$$

3. Для всех значений параметра решить уравнение Фредгольма с вырожденным ядром

$$x(t) = \mu \int\limits_{0}^{\pi} \cos(t-s)\, x(s)\, ds + \cos t;$$

4. Решить уравнение Фредгольма

$$x(t) + 2\int\limits_{0}^{\pi} K(t,s)\, x(s)\, ds = 1, \quad \text{где } K(t,s) = \begin{cases} s-t, & \text{если } t \leqslant s, \\ t-s, & \text{если } t \geqslant s. \end{cases}$$

5. Исследовать последовательности функций на сходимость по мере, почти равномерную сходимость, поточечную сходимость и сходимость почти всюду.

$$x_n(t) = \begin{cases} \cos(nt), |t| \le \dfrac{\pi}{n} \\ -1, |t| > \dfrac{\pi}{n} \end{cases} \quad \text{a) } t \in [-1;1], \quad \text{b) } t \in (-\infty;+\infty)$$

Ответы к тесту 1.

1. $\sigma(\mathrm{T}) = \{0, 2, 1+i, 1-i\}$
2. $\sigma(\mathrm{T}) = \{0, \pi/2\}$
3. $x(t) = \begin{cases} (C+1)sint + Ccost, \mu = \frac{2}{\pi}; \\ \frac{2}{(2+\mu\pi)}(sint - cost), \mu \neq \frac{2}{\pi}; \\ \emptyset, \mu = -\frac{2}{\pi}. \end{cases}$

4. $\mathrm{x(t)} = \dfrac{2sin\sqrt{3}(t-\frac{\pi}{4})}{sin\frac{\sqrt{3}\pi}{4}} + 3cos2t;$

5. a)Равномерно не сходится, а поточечно, почти равномерно, по мере и почти всюду сходится;
   b)Равномерно не сходится, а поточечно, почти равномерно, по мере и почти всюду сходится;

Ответы к тесту 2.

1. $\sigma(\mathrm{T}) = \{0, i, -i\}$;
2. $\sigma(\mathrm{T}) = \{0,1,-\frac{1}{3}\}$;
3. $x(t) = \begin{cases} \frac{2cost}{2-\mu\pi}; \boldsymbol{\mu} \neq \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{\pi}} \\ \emptyset, \boldsymbol{\mu} = -\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{\pi}}. \end{cases}$
4. $x(t) = cos2t$;
5. a)Равномерно не сходится, а поточечно, почти равномерно, по мере и почти всюду сходится;
   b)Равномерно не сходится, а поточечно, почти равномерно, по мере и почти всюду сходится

Информация о разработчиках

Хмылева Татьяна Евгеньевна, к.-т физ.мат. наук, доцент, кафедра математического анализа и теории функций ММФ