


· Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:  
Декан физического факультета

 С.Н. Филимонов

«15» апреля 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

**Симплектическая геометрия**

по направлению подготовки

**03.04.02 Физика**

Направленность (профиль) подготовки:  
**«Фундаментальная и прикладная физика»**

Форма обучения  
**Очная**


Квалификация  
**Магистр**

Год приема  
**2021**

Код дисциплины в учебном плане: Б1.В.ДВ.01.01.09

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП

 О.Н. Чайковская

Председатель УМК

 О.М. Сюсина

Томск – 2021

## **1. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины (модуля)**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

– ПК-1 – Способен самостоятельно ставить конкретные задачи научных исследований в области физики и решать их с помощью современной аппаратуры и информационных технологий с использованием новейшего российского и зарубежного опыта.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИПК-1.1. Знает основные стратегии исследований в выбранной области физики, критерии эффективности, ограничения применимости;

ИПК-1.2. Умеет выделять и систематизировать основные цели исследований в выбранной области физики, извлекать информацию из различных источников, включая периодическую печать и электронные коммуникации, представлять её в понятном виде и эффективно использовать;

ИПК-1.3. Владеет навыками аналитической переработки информации, проведения исследований с помощью современной аппаратуры и информационных технологий, обобщения и представления результатов, полученных в процессе решения задач исследования.

## **2. Задачи освоения дисциплины**

– Освоить основные методы симплектической геометрии применительно к задачам современной теоретической и математической физики, включая приложения в классической механике, квантовой механике и теории квантования

– Научиться применять понятийный аппарат симплектической геометрии для исследования теоретико-полевых моделей и решения практических задач профессиональной деятельности.

## **3. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы**

Дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, является дисциплиной по выбору.

## **4. Семестр(ы) освоения и форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине**

Семестр 3, экзамен.

## **5. Входные требования для освоения дисциплины**

Для успешного освоения дисциплины требуются компетенции, сформированные в ходе освоения образовательных программ предшествующего уровня образования.

Для успешного освоения дисциплины требуются результаты обучения по следующим дисциплинам: Математический анализ, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Дифференциальная геометрия и топология, Классическая механика, квантовая механика.

## **6. Язык реализации**

Русский

## **7. Объем дисциплины (модуля)**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 часов, из которых:

– лекции: 16 ч.;

– практические занятия: 16 ч.;

– в том числе практическая подготовка: 16 ч.  
Объем самостоятельной работы студента определен учебным планом.

## **8. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам**

Тема 1. Линейная симплектическая геометрия.

Симплектические векторные пространства. Симплектический базис, Канонические преобразования. Симплектическая группа. Изотропные, коизотропные и лагранжевы подпространства.

Тема 2. Симплектические многообразия.

Симплектические многообразия. Теорема Дарбу. Канонические преобразования. Симплектический потенциал. Кокасательные расслоения. Гамильтоновы векторные поля. Скобки Пуассона. Классическая механика и симплектическая геометрия. Изотропные, коизотропные и лагранжевы слоения симплектического многообразия. Системы со связями и гамильтонова редукция.

Тема 3. Однородные симплектические многообразия.

Элементарные динамические системы. Отображение комоментов. Отображение моментов. Метод коприсоединенных орбит. Элементарные динамические системы для группы вращений и группы Пуанкаре.

Тема 4. Поляризации на симплектическом многообразии.

Вещественная поляризация. Примеры. Геометрия вещественной поляризации. Примеры комплексных поляризаций.

Тема 5. Предквантование Кириллова-Костанта-Сурьо.

Принцип соответствия. Предквантовый оператор. Квантуемые многообразия. Условие квантования. Предквантование кокасательных расслоений.

Тема 6. Геометрическое квантование.

Конструкция геометрического квантования. Полуплотности и полуформы. Спаривание. Примеры.

## **9. Текущий контроль по дисциплине**

Текущий контроль по дисциплине проводится путем контроля посещаемости и проверки индивидуальных практических заданий. Контрольная точка проводится не менее одного раза в семестр.

## **10. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации**

**Экзамен** в третьем семестре проводится в устной форме по билетам.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Оценка «отлично» ставится при выполнении студентом не менее 80% индивидуальных заданий в ходе промежуточной аттестации и правильном ответе на три вопроса экзаменационного билета. Оценка «хорошо» ставится при выполнении студентом не менее 65% индивидуальных заданий в ходе промежуточной аттестации и правильном ответе на два вопроса экзаменационного билета. Оценка «удовлетворительно» ставится при выполнении студентом не менее 50% индивидуальных заданий в ходе промежуточной аттестации и правильном ответе на один вопрос экзаменационных билетов. При выполнении студентом менее 80% индивидуальных заданий в ходе промежуточной аттестации или при небравильном ответе на все вопросы экзаменационных билетов ставится оценка «неудовлетворительно».

Экзаменационный билет состоит из трех вопросов.

Первые два вопроса направлены на проверку сформированности компетенции ПК-1 в соответствии с индикаторами ИПК-1.1 и ИПК-1.2. Ответы даются в развернутой форме. Третий вопрос (задача) проверяет соответствие индикатору достижения компетенции ИПК-1.3.

Примерный перечень вопросов.

Вопрос 1. Фазовое пространство механической системы как симплектическое многообразие.

Вопрос 2. Принцип соответствия. Формула предквантования Костанта-Сурьо.

Вопрос 3. Задача. Найти гамильтоновы векторные поля и гамильтонианы для действия группы вращений  $SO(3, \mathbf{R})$  на сфере.

## 11. Учебно-методическое обеспечение

а) Электронный учебный курс по дисциплине в электронном университете «Moodle» - <https://moodle.tsu.ru/course/view.php?id=21974>

б) Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

Перечень вопросов, выносимых на экзамен.

1. Что такое кососимметрический билинейный функционал?. Что такое канонический базис?
2. Что такое симплектические векторные пространства? Что такое канонические преобразования? Что такое симплектическая группа? Укажите матричную реализацию симплектической группы и ее алгебры Ли.
3. Что такое изотропные, коизотропные и лагранжевы подпространства?
4. Что такое симплектическое многообразие? Сформулируйте и докажите теорему Дарбу.
5. Что такое согласованные комплексные структуры на симплектическом многообразии?
6. Что такое каноническая симплектическая структура? Симплектическая структура на кокасательном расслоении.
7. Что такое скобка Пуассона на многообразии? Что такое гамильтоново векторное поле?
8. Сформулируйте метод гамильтоновой редукции на подмногообразии. Что такое предсимплектическое многообразие.
9. Что такое преобразование Лежандра? Что такое фазовое пространство?
10. Геометрический смысл уравнений геодезических.
11. Что такое элементарная динамическая система? Приведите примеры.
12. В чем сущность метода орбит Кириллова – Костанта – Сурьо классификации элементарных динамических систем? Что такое коприсоединенное действие? Что такое отображение моментов?
13. Что такое невырожденная коприсоединенная орбита. Как классифицируются вырожденных и невырожденных орбиты в алгебре  $so(3)$  и в алгебре Пуанкаре?
14. Как определяются канонические преобразования?
15. Поясните квантование углового момента с точки зрения метода коприсоединенных орбит.
16. Сформулируйте условие квантования Бора-Зоммерфельда на предсимплектическом многообразии. Что такое квантуемые (пред)симплектические многообразия?
17. Сформулируйте определение и приведите примеры вещественной поляризации.
18. Сформулируйте теорему о глобальной геометрии симплектического многообразия с вещественной поляризацией.

Примерный перечень задач.

1. Доказать, что хаусдорфово симплектическое многообразие ориентируемо.
2. Найти гамильтоновы векторные поля и гамильтонианы для действия группы вращений  $SO(3, \mathbf{R})$  на сфере  $S^2$ .
3. Построить пример локально гамильтонова векторного поля, которое, однако, не является глобально гамильтоновым.

4. Пусть  $(V, \omega)$  – конечномерное линейное симплектическое пространство,  $G$  — абелева группа трансляций, которые являются каноническими преобразованиями,  $G \cong V$ . Найти соответствующие гамильтонианы и коцикл.
5. Провести классификацию однородных симплектических многообразий группы Евклида  $ISO^+(2)$ . Для каждого многообразия найти гамильтонианы и соответствующие векторные поля
6. Найти вещественную поляризацию невырожденных  $K$ -орбит группы движений плоскости  $E(2, \mathbf{R})$ .
7. Показать, что на поверхности  $H = -E < 0$  интегралы задачи Кеплера  $\vec{M}$  и  $\vec{A}/\sqrt{-2mH}$  совпадают с гамильтоновыми генераторами точечных канонических преобразований, индуцированных евклидовыми вращениями в  $\mathbf{R}^4$
8. Найти комплексную поляризацию невырожденных  $K$ -орбит группы вращений  $SO(3)$ .
9. Построить классификацию элементарных динамических систем для группы вращений и группы  $SU(2)$ .
10. Вывести условие квантования для системы из предельной задачи.
11. Построить классификацию массивных и безмассовых элементарных динамических систем для группы Пуанкаре.
12. Вывести условие квантования спина релятивистской частицы.
  - в) План семинарских / практических занятий по дисциплине.
    1. Линейная симплектическая геометрия.
    2. Гамильтоновы векторные поля. Скобка Пуассона.
    3. Приложения симплектической геометрии в классической механике.
    4. Метод коприсоединенных орбит.
    5. Элементарные динамические системы для конкретных групп симметрии.
    6. Предквантование Костанта-Сурью.
    7. Условия квантования Бор-Зоммерфельда.
    8. Примеры конструкции спаривания.
      - г) Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.
 

Самостоятельная работа студента включает:

        - углубленное теоретическое изучение разделов курса при подготовке лекционным и практическим занятиям;
        - подготовку к обсуждению материала, в том числе самостоятельный поиск необходимых источников информации, включая научные ресурсы сети Интернет;
        - подготовку к экзамену.

Вопросы, вынесенные на самостоятельное изучение.

1. Элементарные динамические системы для группы Галилея
2. Элементарные динамические системы для группы Гейзенберга-Вейля.
3. Вывод правила квантования Бора-Зоммерфельда.
4. Квантование полуформ.
5. Когомологические волновые функции.

## 12. Перечень учебной литературы и ресурсов сети Интернет

а) основная литература:

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Наука. 1989.
2. Souriau J.-M. Structure of Dynamical Systems. A Symplectic View of Physics. Progress in Math. V.149. 1997.
3. Карасев М.В., Маслов В.П. Нелинейные скобки Пуассона. Наука. 1991.
4. Костант Б. Квантование и унитарные представления. Часть I. Предквантование. УМН. Т.28, вып.1 (1973) с. 163-225.

5. Кириллов А.А. Геометрическое квантование. Современные проблемы математики. ВИНТИ. 1985, Т.4 с. 141-178.
  6. Woodhouse N. Geometric quantization. Second Edition. Clarendon Press, Oxford. 1991.
  7. Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerovich A. and Sternberg D. Deformation Theory and Quantization. Annals of Physics. V.111 (1978) p. 61-151.
  8. Fedosov B.V. A simple geometrical construction of deformation quantization. J. Differential Geometry. V.48 (1994) p.213-238.
  9. Fedosov B.V. Deformation Quantization and Index Theory. Akademie Verlag, Berlin. 1996.
  10. Горбунов И.В. Симплектическая геометрия в гамильтоновой механике. Томск. ТГУ. 1999.
  11. Горбунов И.В. Введение в симплектическую геометрию и некоторые ее приложения. Томск. ТГУ. 2004.
  12. Шарапов А.А. Лекции по деформационному квантованию. Лекционные заметки по теоретической и математической физике. Под редакцией А.В. Аминовой. Казань.2004.
- б) дополнительная литература:
1. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. Мир. 1881.
  2. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. Наука. 1978.
  3. Березин Ф.А. Методы вторичного квантования. Наука. 1986.
  4. Березин Ф.А. Квантование. Изв. АН СССР. Сер. Математика. Т.38, №5 (1974) с.116-1175.
  5. Фоменко А.Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. МГУ. 1983.
  6. Sniatsky J. Geometric quantization and quantum mechanics. Applied Math. Sciences. V. 30. 1976.

в) ресурсы сети Интернет:

<http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/Books/lsg.pdf> Ana Cannas da Silva Lectures on Symplectic Geometry 2006..

<http://www.math.stonybrook.edu/~dusa/ewmcambrevjn23.pdf> DUSA MCDUFF What is symplectic geometry ?

<https://www.lektorium.tv/lecture/14697>

Курс: Геометрическое квантование | Лектор: Павел Мнев | Организатор: Математическая лаборатория имени П.Л.Чебышева. Лекции 1-12

<https://arxiv.org/abs/2010.15419> Nima Moshayedi. Notes on Geometric Quantization

<https://arxiv.org/abs/1801.02307> Andrea Carosso. Geometric Quantization

### 13. Перечень информационных технологий

а) лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

– Microsoft Office Standart 2013 Russian: пакет программ. Включает приложения: MS Office Word, MS Office Excel, MS Office PowerPoint, MS Office OneNote, MS Office Publisher, MS Outlook, MS Office Web Apps (Word Excel MS PowerPoint Outlook); системы компьютерной вёрстки LaTeX; системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, Waterloo Maple;

– публично доступные облачные технологии (Google Docs, Яндекс диск и т.п.).

б) информационные справочные системы:

– Электронный каталог Научной библиотеки ТГУ –

<http://chamo.lib.tsu.ru/search/query?locale=ru&theme=system>

– Электронная библиотека (репозиторий) ТГУ –

<http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Index>

– ЭБС Лань – <http://e.lanbook.com/>

– ЭБС Консультант студента – <http://www.studentlibrary.ru/>

- Образовательная платформа Юрайт – <https://urait.ru/>
- ЭБС ZNANIUM.com – <https://znanium.com/>
- ЭБС IPRbooks – <http://www.iprbookshop.ru/>

#### **14. Материально-техническое обеспечение**

Аудитории для проведения занятий лекционного типа.

Аудитории для проведения практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой и доступом к сети Интернет, в электронную информационно-образовательную среду и к информационным справочным системам.

Аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в смешенном формате, оснащенные системой («Актру»).

#### **15. Информация о разработчиках**

Горбунов Иван Владиславович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры теоретической физики физического факультета ТГУ, доцент.