Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

УТВЕРЖДАЮ:
Декан физического факультета
С.Н. Филимонов

Оценочные материалы по дисциплине

**Механика**

по направлению подготовки

**03.03.02 Физика**

Направленность (профиль) подготовки:
**«Медицинская и биологическая физика»**

Форма обучения
**Очная**

Квалификация
**Бакалавр**

Год приема
**2025**

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ОП
С.Н.Филимонов

Председатель УМК
О.М. Сюсина

Томск – 2025

**1. Компетенции и индикаторы их достижения, проверяемые данными оценочными материалами**

Целью освоения дисциплины является формирование следующих компетенций:

ОПК-1 Способность применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.

ПК-1 Способность проводить научные исследования в выбранной области с использованием современных экспериментальных и теоретических методов, а также информационных технологий.

Результатами освоения дисциплины являются следующие индикаторы достижения компетенций:

ИОПК 1.1 Знает основные законы, модели и методы исследования физических процессов и явлений

ИПК 1.1 Собирает и анализирует научно-техническую информацию по теме исследования, обобщает научные данные в соответствии с задачами исследования

**2. Оценочные материалы текущего контроля и критерии оценивания**

Элементы текущего контроля: контрольные вопросы и задачи (ИОПК 1.1).
По дисциплине «Механика» предусмотрены ответы на контрольные вопросы и решение задач по каждому разделу. Проводится в форме индивидуального собеседования, в процессе которого студент должен продемонстрировать умение пользоваться основными понятиями, законами и моделями общей физики; применять законы общей физики при решении задач общей физики

**Тема 1. Кинематика материальной точки.**

1. Сформулировать границы применимости Ньютоновской механики.
2. Что такое система отсчёта?
3. В чём состоит модель материальной точки?
4. Что такое радиус-вектор, траектория, путь?
5. Дать определение скорости и ускорения материальной точки. Что такое тангенциальное и нормальное ускорение материальной точки?
6. Дать определение угловой скорости и углового ускорения материальной точки; как они связаны с линейной скоростью и линейным ускорением.

Задача 1.

Радиус-вектор точки А относительно начала координат меняется со временем по закону $\vec{r} = at\vec{i} - bt^2\vec{j}$, где $a$ и $b$ - положительные постоянные; $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - орты осей $x, y$. Найти:

a) уравнение траектории точки $y(x)$;
b) зависимость от времени векторов скорости $\vec{\upsilon}$, ускорения $\vec{w}$ и модулей этих величин;
c) зависимость от времени угла $\alpha$ между векторами $\vec{w}$ и $\vec{\upsilon}$;
d) средний вектор скорости за первые $t$ секунд и модуль этого вектора.

Задача 2.

Небольшое тело бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

a) перемещение тела как функцию времени $\Delta\vec{r}(t)$;
b) средний вектор скорости $\langle\vec{\upsilon}\rangle$ за первые $t$ секунд и за всё время движения.

Задача 3.

Частица движется в плоскости $xy$ со скоростью $\vec{\upsilon} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - орты осей $x$ и $y$; $\alpha$ и $\beta$ - постоянные. В начальный момент частица находилась в точке $x = y = 0$. Найти:

a) уравнение траектории частицы $y(x)$ ;
b) радиус кривизны траектории в зависимости от $x$.

Задача 4.

Колесо вращается вокруг неподвижной оси, так, что угол $\varphi$ его поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где $\beta = 0.20\, {}^{рад}/_{с^2}$. Найти полное ускорение точки A на ободе колеса в момент $t = 2.5с$, если скорость точки A в этот момент $\upsilon = 0.65\, {}^{м}/_{с}$.

**Ключи:**

Задача 1.

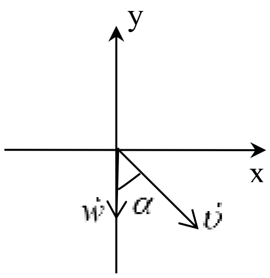
В декартовом базисе радиус – вектор точки $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, следовательно, в данном случае

$$x = at \qquad (1)$$

$$y = -bt^2,$$

выразив из (1) $t = f(x) = \frac{x}{a}$, получаем уравнение траектории

$$y = -\frac{b}{a^2}x^2.$$




$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = a\vec{i} - 2bt\vec{j};$$

$$\vec{w} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -2b\vec{j};$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{a^2 + 4b^2t^2};$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 2b.$$

Как видно из рисунка:

$$tg\alpha = \frac{\upsilon_x}{\upsilon_y} = \frac{a}{2b};$$

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = a\vec{i} - bt\vec{j}; \quad \left|\langle\vec{\upsilon}\rangle\right| = \sqrt{a^2 + b^2t^2}.$$

Задача 2.

Если поместить начало координат в точку, из которой бросили тело, то $\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t)$.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j};$$

$$x = \int \upsilon_x dt = \int \upsilon_{0x} dt = \upsilon_{0x} t;$$

$$y = \int \upsilon_y dt;$$

$$\upsilon_y = \int a_y dt = a_y t + const.$$

Из начальных условий $t = 0; \upsilon_y = \upsilon_{0y} \Rightarrow const = \upsilon_{0y}$;

$$a_y = -g \Rightarrow \upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt.$$

$$y = \int (\upsilon_{0y} - gt) dt = \upsilon_{0y} t - \frac{gt^2}{2}.$$

Таким образом

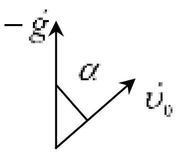
$$\vec{r}(t) = \upsilon_{0x} t \vec{i} + \upsilon_{0y} t \vec{j} - \frac{gt^2}{2}\vec{j}; \ \vec{\upsilon}_0 = \upsilon_{0x}\vec{i} + \upsilon_{0y}\vec{j}; \ \vec{g} = -g\vec{j}.$$

Следовательно

$$\vec{r}(t) = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}}{t} = \vec{\upsilon}_0 + \frac{\vec{g}t}{2}.$$

Полное время движения $\tau$ определяется из условия $y = 0$. То есть необходимо решить уравнение:




$$\upsilon_{0y}\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0,$$

$$\upsilon_{0y} - \frac{g\tau}{2} = 0,$$

$$\tau = \frac{2\upsilon_{0y}}{g};$$

$\upsilon_{0y} - ?$ $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \cos\alpha$. Как видно из рисунка $\cos\alpha$ может быть выражен через скалярное произведение известных векторов $\vec{\upsilon}_0$ и $-\vec{g}$.

$$\cos\alpha = \frac{(-\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}_0)}{g\upsilon_0} \text{ и } \tau = \frac{2(-\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}_0)}{g^2}$$

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \vec{\upsilon}_0 - \vec{g}\frac{(\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}_0)}{g^2}.$$


$$\tau = \frac{2\upsilon_{0y}}{g};$$

$\upsilon_{0y} - ?$ $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \cos\alpha$. Как видно из рисунка $\cos\alpha$ может быть выражен через скалярное произведение известных векторов $\vec{\upsilon}_0$ и $-\vec{g}$.

$$\cos\alpha = \frac{(-\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}_0)}{g\upsilon_0} \text{ и } \tau = \frac{2(-\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}_0)}{g^2}$$

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \vec{\upsilon}_0 - \vec{g}\frac{(\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}_0)}{g^2}.$$


Задача 3.

В декартовом базисе

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j},$$

Следовательно, в данном случае

$$\upsilon_x = \alpha\,,\ \upsilon_y = \beta x\,.$$

С другой стороны, по определению

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \alpha \qquad (1)$$

Решая дифференциальное уравнение (1), с учётом начальных условий получаем

$$x = \alpha t \Rightarrow$$

$$t = \frac{x}{\alpha}\,.$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \beta x = \alpha\beta t \Rightarrow$$

$$y = \alpha\beta t^2/2$$

Таким образом уравнение траектории частицы

$$y = (\beta/2\alpha)x^2\,.$$

Радиус кривизны можно найти из определения нормального ускорения частицы:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow R = \frac{\upsilon^2}{a_n}\,.$$

$$\upsilon^2 = \alpha^2 + \beta^2 x^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = (\frac{d\upsilon_y}{dt})^2 = (\frac{d}{dt}(\alpha\beta t))^2 = \alpha^2\beta^2$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 t^2} = \frac{1}{2}\frac{2\beta^2\alpha^2 t}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 t^2}} = \frac{\beta^2\alpha x}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}\,;$$

$$a_n = \sqrt{\alpha^2\beta^2 - (\frac{\beta^2\alpha x}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}})^2} = \frac{\alpha^2\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}\,;$$

$$R = \frac{\alpha^2\left[1 + (\frac{\beta x}{\alpha})^2\right]\left[1 + (\frac{\beta x}{\alpha})^2\right]^{1/2}}{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\left[1 + (\frac{\beta x}{\alpha})^2\right]^{3/2}$$

Задача 4.

Выразим полное ускорение точки через его нормальную и тангенциальную составляющие:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,;$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\,,$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}\,;$$

$$\upsilon = \omega R\,,$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta t^2) = 2\beta t \Rightarrow$$

$$\upsilon = 2R\beta t\,. \qquad (1)$$

$$a_\tau = 2\beta R = const\,,$$

$$a_n = \frac{(2R\beta t)^2}{R} = 4R\beta^2 t^2 \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{4\beta^2 R^2 + (4R\beta^2 t^2)^2} \qquad (2).$$

Подставим в (2) значение радиуса в заданный момент времени, воспользовавшись уравнением (1): $R = \frac{\upsilon_1}{2\beta t_1}$, получим

$$a_1 = \sqrt{\frac{4\beta^2\upsilon_1^2}{4\beta^2 t_1^2} + \left(\frac{4\upsilon_1\beta^2 t_1^2}{2\beta t_1}\right)^2} = \frac{\upsilon_1}{t_1}\sqrt{1 + 4\beta^2 t_1^4}\,.$$

**Тема 2. Динамика материальной точки.**

1. Первый закон Ньютона и инерциальные системы отсчёта.
2. Импульс материальной точки. Второй закон Ньютона. Сила. Роль начальных условий.
3. Третий закон Ньютона; границы его применимости.

Задача 1.

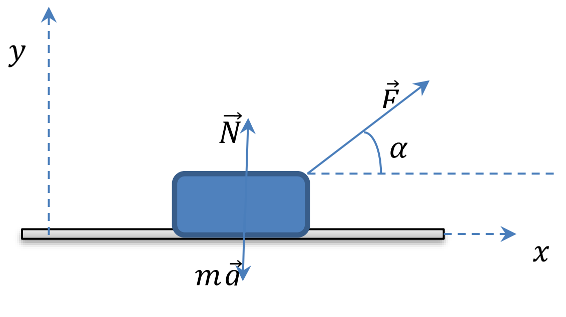
Частица движется вдоль оси $x$ по закону $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где $\alpha$ и $\beta$ - положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу равна $\vec{F}_0$. Найти значение $F_x$ силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

Задача 2.

Аэростат массы $m = 250 кг$ начал опускаться с ускорением $a = 0.20\, м/с^2$. Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Сопротивление воздуха не учитывать.

Задача 3.

Брусок массы $m$ тянут за нить так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения $k$. Найти угол $\alpha$, при котором




натяжение нити будет минимальным.

Задача 4.

Нить перекинута через лёгкий вращающийся без трения блок. На одном конце нити прикреплен груз массы М, а по другой свисающей части нити скользит муфточка массы $m$ с постоянным ускорением $a'$ относительно нити. Найти силу трения, с которой нить действует на муфточку.

**Ключи:**

Задача 1.

По второму закону Ньютона:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \ ;$$

$$F_x = m(2\alpha - 6\beta t) \ . \qquad (1)$$

По условию задачи при $t = 0$ $F_x = F_0$, следовательно, из (1) можно выразить массу частицы: $m = \frac{F_0}{2\alpha}$. В результате получаем зависимость силы, действующей на частицу, от времени:

$$F_x = \frac{F_0}{2\alpha}(2\alpha - 6\beta t) \ . \qquad (2)$$

В точках поворота скорость частицы должна быть равна нулю, то есть

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow 2\alpha t - 3\beta t^2 = 0$$

и в момент поворота $t = t_n = \frac{2\alpha}{3\beta}$. Таким образом, сила в моменты поворота:

$$F_{x1} = \frac{F_0}{2\alpha}(2\alpha - 6\beta\frac{2\alpha}{3\beta}) = -F_0 \, .$$

Условие $x = 0$ выполняется при $t = \frac{\alpha}{\beta}$ , следовательно

$$F_{x2} = -2F_0 \, .$$

Задача 2.

Запишем уравнения движения аэростата до и после сбрасывания за борт балласта, обозначив массу аэростата после сбрасывания балласта $m_1$ :

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} \qquad (1)$$

$$m_1\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} \qquad (2)$$

Тогда проекции уравнений на ось $y$ системы координат $xoy$, связанной с поверхностью Земли, имеют вид:

$$-ma = -mg + F \qquad (3)$$

для уравнения (1) и

$$m_1 a = -m_1 g + F \qquad (4)$$

для уравнения (2). Вычитая из уравнения (3) уравнение (4), получаем

$$-ma - m_1 a = -mg + m_1 g \, . \qquad (5)$$

Для того, чтобы выделить искомую массу балласта $\Delta m = m - m_1$ прибавим к левой и правой части уравнения (5) $ma$ . В результате имеем:

$$\Delta ma - ma = -\Delta mg + ma \Rightarrow$$
$$\Delta m = \frac{2ma}{g+a}.$$

Задача 3.

Поскольку скорость бруска постоянна, его ускорение равно нулю и следовательно, уравнение движения центра масс бруска имеет вид:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0.$$

В проекциях на оси

$$F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = 0$$
$$F\sin\alpha + N - mg = 0 \ \Rightarrow$$
$$N = mg - F\sin\alpha.$$
$$F_{\text{тр}} = kN \quad \Rightarrow$$
$$F\cos\alpha + kF\sin\alpha - kmg = 0 \ \Rightarrow$$
$$F = \frac{kmg}{\cos\alpha + k\sin\alpha}.$$

Исследуем полученную функцию $F(\alpha)$ на минимум:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{kmg}{\cos\alpha + k\sin\alpha}\right) = 0$$

$$\frac{kmg(k\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\cos\alpha + k\sin\alpha)^2} = 0 \ \Rightarrow$$

$$k\cos\alpha = \sin\alpha \ \Rightarrow$$
$$\tan\alpha = k; \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(\cot\alpha)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+{}^{1}/_{k^2}}}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$
$$F_{min} = \frac{kmg}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}\right)} = \frac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}$$

Задача 4.

На тело $m$ со стороны нити действует и действует сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ следовательно, согласно третьему закону Ньютона, на нить со стороны тела также действует сила, равная по модулю $F_{\text{тр}}$, но направленная вниз. Со стороны тела М на нить действует сила, равная по модулю силе натяжения $T$. Таким образом на любой участок нити $\Delta m$ действуют силы $\vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{T}$. Запишем для элемента $\Delta m$ второй закон Ньютона:

$$\Delta m\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

Тогда, в приближении невесомости нити ( $\Delta m = 0$ ), $T = F_{\text{тр}}$.

Запишем для рассматриваемых тел уравнения движения центра масс в системе отсчёта, связанной с землёй, в проекции на ось $y$:

$$-Ma = F_{\text{тр}} - Mg$$
$$m(a - a') = F_{\text{тр}} - mg,$$

в приближении не растяжимости нити, нить, по которой скользит муфточка, движется относительно земли с тем же ускорением $a$, что и тело $M$.

$$a = g - \frac{F_{\text{тр}}}{M} \Rightarrow$$

$$m\left(g - \frac{F_{\text{тр}}}{M} - a'\right) = F_{\text{тр}} - mg$$

$$F_{\text{тр}}\left(\frac{m}{M}+1\right)=2mg-ma'$$

$$F_{\text{тр}}=\frac{mM(2g-a')}{M+m}.$$

**Тема 3. Система материальных точек. Закон сохранения импульса.**

1. Сформулировать закон сохранения импульса.
2. Сформулировать принцип относительности Галилея.
3. Дать определение центра масс системы; сформулировать теорему о движении центра масс.

Задача 1.

Две одинаковые тележки движутся друг за другом (без трения) с одной и той же скоростью $\overrightarrow{V_0}$. На задней тележке находится человек массы $m$. В некоторый момент человек прыгнул в переднюю тележку со скоростью $\vec{U}$ относительно своей тележки. Имея ввиду, что масса каждой тележки равна $M$, найти скорости, с которыми будут двигаться обе тележки после этого.

Задача 2.

Плот массы $M$ с человеком массы $m$ покоится на поверхности пруда. Относительно плота человек совершает перемещение $\vec{l'}$ со скоростью $\overrightarrow{V'}(t)$ и останавливается. Пренебрегая сопротивлением воды, найти:

*a)* перемещение $\vec{l}$ плота относительно берега;

*b)* горизонтальную составляющую силы, с которой человек действовал на плот в процессе движения.

Задача 3.

Частица 1 столкнулась с частицей 2, в результате чего возникла составная частица. Найти её скорость $\vec{V}$ и модуль скорости, если масса у частицы 2 в $\eta = 2.0$ раза больше массы частицы 1, а их скорости перед столкновением соответственно равны: $\overrightarrow{V_1} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{V_2} = 4\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$ , где компоненты скорости даны в системе «СИ».

Задача 4.

Через блок перекинута верёвка, на одном конце которой висит лестница с человеком, на другом – уравновешивающий груз массы $M$. Человек массы $m$ совершил перемещение $\vec{l'}$ относительно лестницы вверх и остановился. Пренебрегая массами блока и верёвки, а также трением в оси блока, найти перемещение центра масс этой системы.

**Ключи:**

Задача 1.

Рассмотрим систему тел: «две тележки + человек». Поскольку в горизонтальном направлении внешние силы на систему не действуют, выполняется закон сохранения импульса ⇒ суммарный импульс системы в момент времени, когда человек находился на задней тележке, равен импульсу системы в момент времени, когда человек движется уже вместе с передней тележкой:

$(M+m)\overrightarrow{V_0} + M\overrightarrow{V_0} = \mathrm{M}\overrightarrow{V_1} + (M+m)\overrightarrow{V_2}$, (1)

где $\overrightarrow{V_1}$ и $\vec{V_2}$ скорости задней и передней тележек после взаимодействия.

Для получения ещё одного уравнения рассмотрим систему тел: «задняя тележка + человек» . Суммарный импульс этой системы в момент времени, когда человек находился на задней тележке равен суммарному импульсу в момент времени, когда непосредственно после прыжка, тележка движется со скоростью $\overrightarrow{V_1}$, а человек в воздухе движется со скоростью $\vec{U}$ относительно тележки:

$$(M+m)\overrightarrow{V_0} = M\overrightarrow{V_1} + m\left(\overrightarrow{V_1} + \vec{U}\right) \qquad (2)$$

$$(M+m)\overrightarrow{V_0} - m\vec{U} = (M+m)\overrightarrow{V_1} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_0} - \frac{m}{m+M}\vec{U}$$

Подставим полученное выражение для скорости $\overrightarrow{V_1}$ в уравнение (1):

$$(M+m)\overrightarrow{V_0} + M\overrightarrow{V_0} = M\overrightarrow{V_0} - \frac{mM}{m+M}\vec{U} + (M+m)\overrightarrow{V_2} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_0} + \frac{mM}{(M+m)^2}\vec{U}$$

Задача 2.

Поскольку на систему «человек + плот» в горизонтальном направлении не действуют внешние силы, положение центра масс этой системы относительно берега остаётся неизменным: $\overrightarrow{r_c} = const$ и $d\overrightarrow{r_c} = 0$.

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{m\overrightarrow{r_ч} + M\overrightarrow{r_п}}{M+m},$$

где $\overrightarrow{r_ч}$ и $\overrightarrow{r_п}$ – радиус-векторы центров масс человека и плота в системе отсчёта, связанной с берегом.

Пусть $\overrightarrow{r'_ч}$ определяет положение центра масс человека относительно центра масс плота, тогда

$$\overrightarrow{r_ч} = \overrightarrow{r_п} + \overrightarrow{r'_ч} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{m(\overrightarrow{r_п} + \overrightarrow{r'_ч}) + M\overrightarrow{r_п}}{M+m}$$

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{m\overrightarrow{r'_ч} + (M+m)\overrightarrow{r_п}}{M+m} = const \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{dr_c} = \frac{md\overrightarrow{r'_ч} + (M+m)d\overrightarrow{r_п}}{M+m} = 0 \Rightarrow$$

$$(M+m)\int d\overrightarrow{r_п} = -m\int d\overrightarrow{r'_ч} \Rightarrow$$

$$\vec{l} = -\frac{m}{m+M}\vec{l'}.$$

Изменение импульса плота относительно берега происходит за счёт действия на него силы в процессе движения человека. Таким образом, искомая сила:

$$\vec{F} = \frac{d\overrightarrow{P_п}}{dt},$$

где $\overrightarrow{P_п}$ - импульс плота относительно берега. Следовательно:

$$\overrightarrow{P_п} = M\frac{d\vec{l}}{dt} = -\frac{Mm}{m+M}\frac{d\vec{l'}}{dt} = \frac{Mm}{m+M}\overrightarrow{V'}(t) \Rightarrow$$

$$\vec{F} == -\frac{Mm}{m+M}\frac{d\overrightarrow{V'}(t)}{dt}.$$

Задача 3.

Закон сохранения импульса для абсолютно неупругого удара:

$$m(1+\eta)\vec{V} = m\overrightarrow{V_1} + \eta m\overrightarrow{V_2} \Rightarrow$$

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{V_1} + \eta\overrightarrow{V_2}}{1+\eta} = \frac{2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\eta\vec{\imath} - 5\eta\vec{\jmath}}{1+\eta}$$

$$\vec{V} = \frac{2\vec{\imath}(1+2\eta) + \vec{\jmath}(3-5\eta)}{1+\eta}$$

$$V = \sqrt{\frac{4(1+2\eta)^2 + (3-5\eta)^2}{(1+\eta)^2}}$$

Задача 4.

В системе отсчёта, связанной с центром блока, положение центра масс:

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{M\overrightarrow{r_1} + m\overrightarrow{r_2} + (M-m)\overrightarrow{r_3}}{M+m+(M-m)},$$

где $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}$ и $\overrightarrow{r_3}$ - радиус-векторы центров масс груза, человека и лестницы соответственно.

$$\Delta\overrightarrow{r_c} = \frac{M\Delta\overrightarrow{r_1} + m\Delta\overrightarrow{r_2} + (M-m)\Delta\overrightarrow{r_3}}{2M}$$

$$\Delta\overrightarrow{r_1} = -\Delta\overrightarrow{r_3}$$

$$\Delta\overrightarrow{r_2} = \Delta\overrightarrow{r_3} + \overrightarrow{l'} \Rightarrow$$

$$\Delta\overrightarrow{r_c} = \frac{m}{2M}\overrightarrow{l'}\ .$$

Под действием какой силы центр масс перемещается? Когда человек начинает двигаться, он действует с дополнительной силой, направленной вниз. В результате натяжение верёвки возрастает и внешняя сила, действующая на систему со стороны подвеса, оказывается больше суммарной силы тяжести. Поэтому результирующая всех внешних сил будет направлена вверх, что и обусловливает перемещение вверх центра масс всей системы.

**Тема 4. Работа. Мощность. Кинетическая энергия. Потенциальная энергия.**

1. Что такое работа и кинетическая энергия; какова связь между ними?
2. Консервативные силы и потенциальная энергия.
3. Сформулировать закон сохранения полной механической энергии системы.

Задача 1.

Небольшая шайба массы $m = 50$г, если её положить на шероховатую поверхность полусферы, начинает скользить на высоте $h_1 = 60$см от горизонтального основания полусферы. Продолжая скользить, шайба отрывается от полусферы на высоте $h_2 = 25$см. Найти работу сил трения, действующих на шайбу при её скольжении.

Задача 2.

Небольшому телу массы $m$, находящемуся на горизонтальной плоскости, сообщили скорость $V_0$. Коэффициент трения зависит от пройденного пути $S$ по закону $k = \alpha S$, где $\alpha = const$. Найти максимальную мгновенную мощность силы трения.

Задача 3.

Потенциальная энергия частицы в некотором поле имеет вид $U = {}^{a}/_{r^2} - {}^{b}/_{r}$, где $a$ и $b$ положительные постоянные, $r$ - расстояние от центра поля. Найти:

*a)* значение $r_0$, соответствующее равновесному положению частицы; выяснить устойчиво ли это положение;

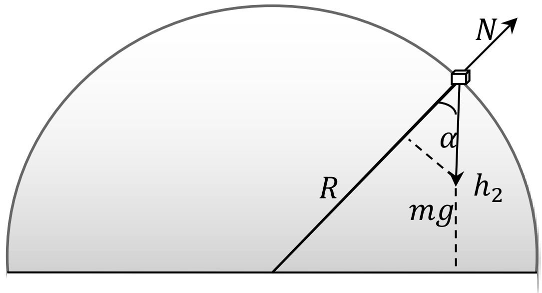
b) максимальное значение силы притяжения.

Задача 4.

Частица массы $m$ движется по окружности радиуса $R$ с нормальным ускорением, которое меняется со временем по закону $a_n = \alpha t^2$, где $\alpha - const$. Найти зависимость от времени мощности всех сил, действующих на частицу, а также среднее значение этой мощности за первые $t$ секунд после начала движения.

**Ключи:**

Задача 1.




$$A_{\text{тр}} = mg(h_2 - h_1) + \frac{mV_2^2}{2}$$

Запишем уравнение движения центра масс шайбы в проекции на ось $R$:

$$mg\cos\alpha - N = ma_n = \frac{mV^2}{R}$$

В момент отрыва шайбы от поверхности полусферы на высоте $h_2$ сила реакции опоры $N = 0 \Rightarrow$

$$mg\cos\alpha = \frac{V_2^2}{R}$$

Но, как следует из рисунка,

$$\cos\alpha = \frac{h_2}{R}$$

Поэтому:

$$mg\frac{h_2}{R} = \frac{mV_2^2}{R}$$

$$mV_2^2 = mgh_2 \Rightarrow$$

$$A_{\text{тр}} = mg(h_2 - h_1) + mg\frac{h_2}{2}$$

$$A_{\text{тр}} = mg\left(\frac{3}{2}h_2 - h_1\right).$$

Задача 2.

$$N_t = \overrightarrow{F_{\text{тр}}} \cdot \vec{V} = -kmg \cdot V$$

$$m\frac{dV}{dt} = -\alpha Smg$$

$$V = \frac{dS}{dt} \rightarrow dt = \frac{dS}{V}$$

$$\int VdV = -\int g\alpha\, SdS$$

$$\frac{V^2}{2} = -g\alpha\frac{S^2}{2} + C$$

$$\text{когда } S = 0, \qquad V = V_0, \text{следовательно}, \quad C = \frac{V_0^2}{2}$$

$$V = \sqrt{V_0^2 - g\alpha S^2}$$

$$N(S) = \alpha Smg\sqrt{V_0^2 - g\alpha S^2}$$

$$\frac{dN}{dS} = 0; \quad \frac{d}{dS}(S^2V_0^2 - g\alpha S^4) = 0$$

$$2SV_0^2 - 4g\alpha S^3 = 0$$

$$S = \frac{V_0}{\sqrt{2g\alpha}}$$

$$N_{max} = mg\alpha\frac{V_0}{\sqrt{2g\alpha}}\sqrt{V_0^2 - \frac{g\alpha V_0^2}{2g\alpha}}$$

$$N_{max} = \frac{mV_0^2}{2}\sqrt{g\alpha}$$

Задача 3

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2} = \frac{1}{r^2}\left(b - \frac{2a}{r}\right) = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{2a}{b}$$

$$\left[\frac{d^2U}{dr^2}\right]_{r=r_0} = \left[6\frac{a}{r^4} - 2\frac{b}{r^3}\right]_{r=r_0} = \frac{2}{r_0^3}\left(\frac{3ab}{2a} - b\right) > 0 \Rightarrow$$

$$[U]_{r=r_0} = U_{min} \,,$$

что соответствует положению устойчивого равновесия.

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{2a}{r^3}\left(\frac{3a}{r} - b\right) = 0 \Rightarrow r|_{max} = \frac{3a}{b}$$

$$F_{max} = \frac{b^2}{9a^2}\left(\frac{2ab}{3a} - 1\right) = -\frac{b^3}{27a^2}$$

Исследуем функции $U(r)$ и $F_r(r)$ для построения графиков:

$$U = \frac{1}{r}\left(\frac{a}{r} - b\right) = 0 \Rightarrow r_{U=0} = \frac{a}{b}; \quad r_0 = \frac{2a}{b} \Rightarrow U(r_0) = U_{min}; \quad r \to 0 \;\; U \to \infty.$$

$$r_{F=0} = \frac{2a}{b}; \;\; r \to 0 \;\; F \to \infty; \;\; r_m = \frac{b^3}{27a^2} \;\; F(r_m) = F_{min}.$$

Задача 4.

Работа всех действующих в течение какого-то времени на частицу сил, равна приращению её кинетической энергии. В начальный момент времени кинетическая энергия частицы равнялась нулю, поскольку

$$a_n = \alpha t^2 = \frac{V^2}{R} \to V^2 = R\alpha t^2$$

Следовательно, в любой момент времени приращение кинетической энергии

$$\Delta T = \frac{mV^2}{2}$$

Поэтому:

$$A(t) = \frac{mV^2}{2} = \frac{mR\alpha t^2}{2}$$

$$N_t = \frac{dA}{dt} = mR\alpha t$$
$$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t} = \frac{m\alpha R}{2} t$$

**Тема 5. Момент силы и момент импульса относительно точки и относительно оси. Момент инерции. Уравнение вращательного движения относительно неподвижной оси.**

1. Момент силы и момент импульса относительно неподвижного начала и относительно неподвижной оси. Уравнение моментов.
2. Что такое момент инерции, его физический смысл?
3. Записать уравнение вращательного движения абсолютно твёрдого тела относительно неподвижной оси.
4. Сформулировать закон сохранения момента импульса системы.

Задача 1.

К точке радиус-вектор которой относительно начала координат $O$ равен $\vec{r} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, приложена сила $\vec{F} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath}$, где $a, b, A, B$ - постоянные, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ - орты осей $x$ и $y$. Найти момент $\vec{M}$ и плечо $l$ силы $\vec{F}$ относительно точки $O$.

Задача 2.

Момент импульса частицы относительно точки $O$ меняется со временем по закону $\vec{L} = \vec{a} + \vec{b}t^2$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - постоянные векторы, причём вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$. Найти относительно точки $O$ момент силы, действующей на частицу, когда угол $\alpha$ между векторами окажется равным 45 градусам.

Задача 3.

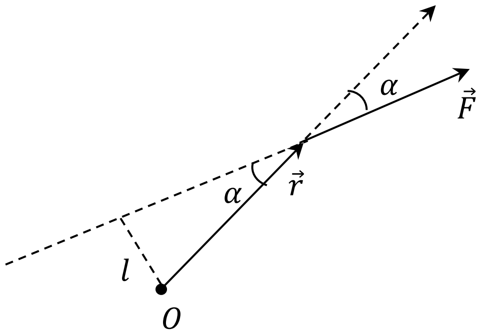
Горизонтальный тонкий однородный стержень $AB$ массы $m$ и длины $l$ может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец $A$. В некоторый момент на конец $B$ начала действовать постоянная сила $\vec{F}$, которая всё время перпендикулярна к первоначальному положению покоившегося стержня и направлена в горизонтальной плоскости. Найти угловую скорость стержня как функцию его угла

Задача 4.

Однородный цилиндр радиуса $R$ раскрутили вокруг его оси до угловой скорости $\omega_0$ и затем поместили в угол. Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен $k$. Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?

**Ключи:**

Задача 1.




$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}) \times (A\vec{\imath} + B\vec{\jmath}) = (aB - bA)\vec{\imath} \times \vec{\jmath} \Rightarrow$$

$$\vec{M} = (aB - Ba)\vec{k}$$

Модуль момента силы можно представить как произведение модуля силы на плечо силы $l$, которое определяется как кратчайшее расстояние от точки $O$ до линии действия силы. Как следует из рисунка: $l = r\sin\alpha$. С другой стороны, модуль векторного произведения: $M = Fr\sin\alpha$. Таким образом,

$$M = Fl.$$

$$M = aB - bA$$

$$F = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \Rightarrow$$

$$l = \frac{aB - bA}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Задача 2.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 2\vec{b}t$$

$$\vec{M} \cdot \vec{L} = ML\cos\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{M} \cdot \vec{L}}{ML}$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2b^2t_0^3}{\sqrt{a^2 + b^2t_0^4} \cdot 2bt_0}$$

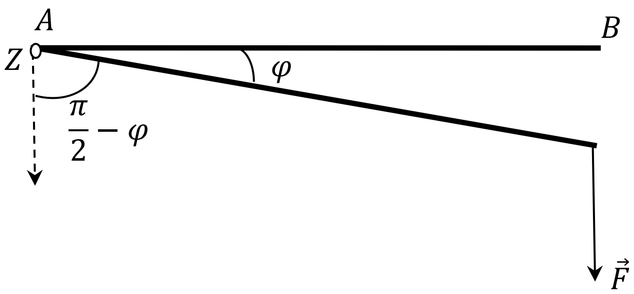
$$4b^2t_0^4 = 2a^2 + 2b^2t_0^4 \quad \Rightarrow$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\vec{M}(45°) = 2\vec{b}\sqrt{a/b}.$$

Задача 3.

Запишем уравнение вращательного движения стержня относительно оси $Z$, проходящей через его конец $A$.




$$I\frac{d\omega}{dt} = M_z$$

$$M_z = lF\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = lF\cos\varphi$$

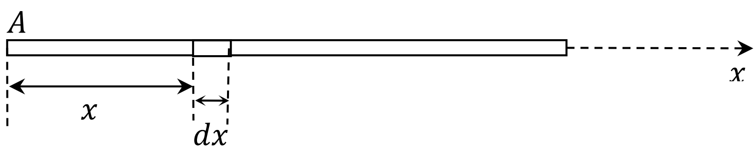
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{d\varphi}{\omega}$$

$$I\omega d\omega = lF\cos\varphi\, d\varphi$$

$$I\int \omega d\omega \;=\; lF\int \cos\varphi\, d\varphi\,; \qquad I\frac{\omega^2}{2} = Fl\sin\varphi + C$$

$$t = 0\; F = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = 0 \text{ и } \omega = 0 \;\Rightarrow \text{C} = 0.$$

Определим момент инерции однородного стержня. Для этого выделим на

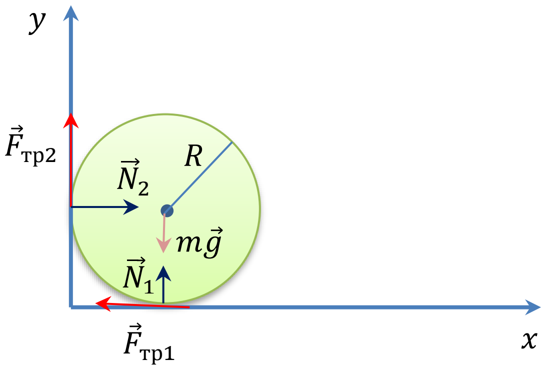



расстоянии $x$ от оси элемент стержня $dx$, который можно считать материальной точкой массы $dm$. Тогда:

$$dI = x^2dm, \qquad \text{где } dm = \frac{m}{l}dx \quad \Rightarrow \quad I = \frac{m}{l}\int_0^l x^2dx = \frac{ml^2}{3}$$

$$\frac{ml^2}{6}\omega^2 = Fl\sin\varphi \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6F\sin\varphi}{ml}}$$

Задача 4.




Число оборотов цилиндра до его остановки можно определить из условия:

$$n = \frac{\varphi_k}{2\pi},$$

где $\varphi_k -$ угол, на который повернётся цилиндр за период времени от начала движения до остановки.

Предположим, что начальная угловая скорость направлена «к нам». На цилиндр в процессе движения действует момент сил трения, направленный «от нас». Следовательно, уравнение вращательного движения в проекции на ось, совпадающую по направлению с начальной угловой скоростью, имеет вид:

$$I\frac{d\omega}{dt} = -(F_1 + F_2)R$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\varphi}{\omega} \Rightarrow$$

$$\frac{mR^2}{2}\omega d\omega = -(F_1 + F_2)Rd\varphi$$

$$\frac{mR}{2}\frac{\omega^2}{2} = -(F_1 + F_2)\varphi + C;$$

Начальные условия: $\varphi = 0, \ \ \omega = \omega_0 \ \ \Rightarrow$

$$C = \frac{mR}{4}\omega_0^2 \Rightarrow \text{поскольку при } \varphi = \varphi_k \ \omega = 0, \text{получаем:}$$

$$\varphi_k = \frac{mR}{4(F_1 + F_2)}\omega_0^2$$

Силы трения определим из уравнения движения центра масс системы:

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

В проекциях на оси координат:

$$\text{ось } x\text{:} \quad N_2 - F_1 = 0 \Rightarrow \quad N_2 = F_1$$

$$\text{ось } y\text{:} \quad N_1 + F_2 - mg = 0$$

$$F_1 = kN_1 \ \Rightarrow \ N_2 = kN_1$$

$$F_2 = kN_2 = k^2N_1 \ \Rightarrow$$

$$N_1 + k^2N_1 - mg = 0$$

$$N_1 = \frac{mg}{k^2+1}; \quad N_2 = \frac{kmg}{k^2+1} \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{kmg}{k^2+1}; \ F_2 = \frac{k^2 mg}{k^2+1}$$

$$\varphi_k = \frac{mR\omega_0^2(k^2+1)}{4kmg(k+1)}$$

$$n = \frac{R\omega_0^2(k^2+1)}{8\pi kg(k+1)}$$

**Тема 6. Неинерциальные системы отсчёта.**

1. Что такое инерциальные и неинерциальные системы отсчёта.
2. Ввести понятие сил инерции.

Задача 1.

Человек массы m=60кг идёт равномерно по периферии горизонтальной круговой платформы радиуса $R = 3.0$м, которую вращают с угловой скоростью $\omega = 1.00\ ^{\text{рад}}/_{\text{с}}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через её центр. Найти горизонтальную составляющую силы, действующей на человека со стороны платформы, если результирующая сил инерции, приложенных к нему в системе отсчёта «платформа», равна нулю.

Задача 2.

Горизонтальный диск вращают с угловой скоростью $\omega = 6.0\ ^{\text{рад}}/_{\text{с}}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По одному из диаметров диска движется небольшое тело массы $m = 0{,}50$кг с постоянной относительно диска скоростью $V' = 50\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$. Найти силу, с которой диск действует на тело в момент, когда оно находится на расстоянии $r = 30$см от оси вращения.

Задача 3.

Поезд массы $m = 2000$т движется на северной широте $\varphi = 60°$. Определить:

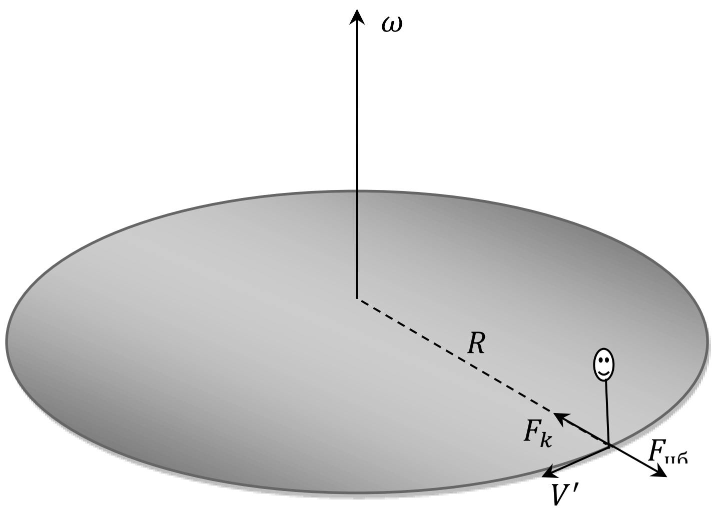
*a)* Модуль и направление силы бокового давления на рельсы, если он движется вдоль меридиана со скоростью $V = 54\ ^{\text{км}}/_{\text{час}}$.

*b)* В каком направлении и с какой скоростью должен был бы двигаться поезд, чтобы результирующая сила инерции в системе отсчёта «Земля» была равна нулю.

Задача 4.

Горизонтально расположенный гладкий стержень $AB$ вращают с угловой скоростью $\omega = 2.00\ ^{\text{рад}}/_{\text{с}}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец $A$. по стержню свободно скользит муфточка массы $m = 0.50$кг, движущаяся из точки $A$ с начальной скоростью $V_0 = 1.0\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}$. Найти действующую на муфточку силу Кориолиса (в системе отсчёта, связанной с вращающимся стержнем) в момент, когда муфточка оказалась на расстоянии $r_1 = 50$см от оси вращения

**Ключи**:




Задача 1.

Поскольку движение по окружности происходит с постоянной по модулю скоростью, полное ускорение равно нормальному ускорению и уравнение движения центра масс (с учётом того, что по условию задачи $\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F_{цб}} = 0$) имеет вид:

$$m\overrightarrow{a_n} = \vec{F},$$

где $F$ – искомая сила, действующая на человека со стороны платформы. Следовательно

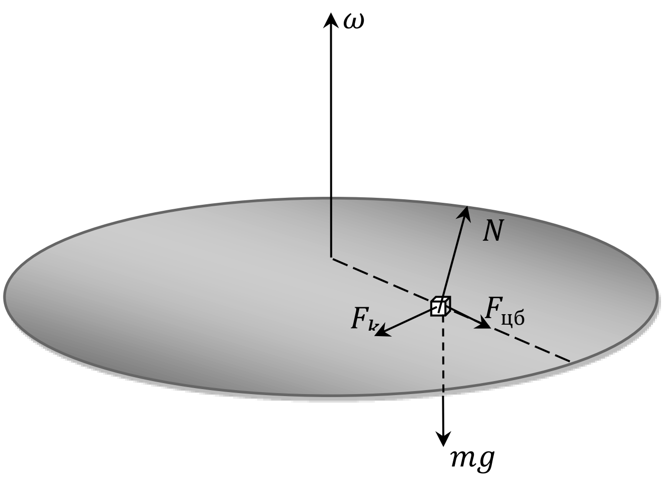
$$\frac{mV'^2}{R} = F.$$

Скорость определим из условия равенства по модулю сил инерции:

$$2mV'\omega = m\omega^2 R \ \Rightarrow V' = \frac{\omega R}{2};$$

$$F = \frac{m\omega^2 R}{4} = 45H.$$

Задача 2.




Поскольку тело относительно диска движется с постоянной скоростью, в системе отсчёта «диск» сумма всех действующих на тело сил равна нулю. Следовательно:

$$\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F_{цб}} + m\vec{g} + \vec{N} = 0$$

Поэтому сила $\vec{N}$, с которой диск действует на тело:

$$\vec{N} = -\left(\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F_{цб}} + m\vec{g}\right)$$

Все три силы взаимно перпендикулярны ⇒

$$N = \sqrt{(F_k)^2 + \left(F_{цб}\right)^2 + (mg)^2}$$

$$N = m\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2 + (2V'\omega)^2} = 8H.$$

Задача 3.

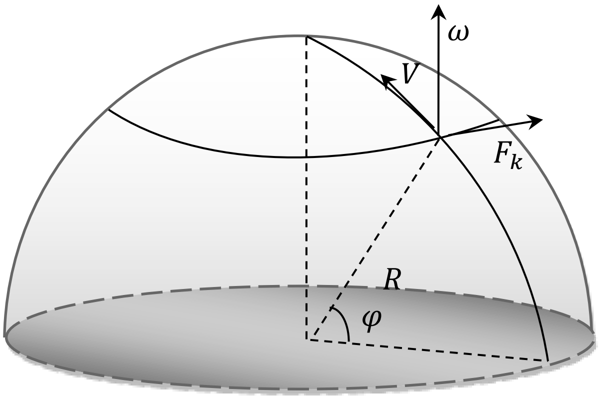



Рис. 1

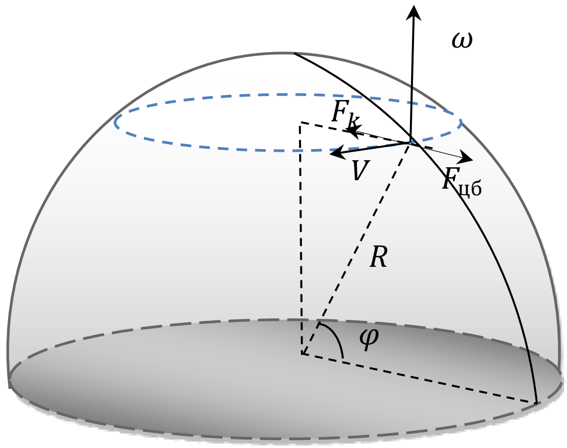



Рис. 2

$$\overrightarrow{F_k} = 2m\left[\vec{V}, \vec{\omega}\right]$$

Как следует из рис.1, сила бокового давления поезда (которая определяется силой Кориолиса) всегда действует на правый по ходу поезда рельс.

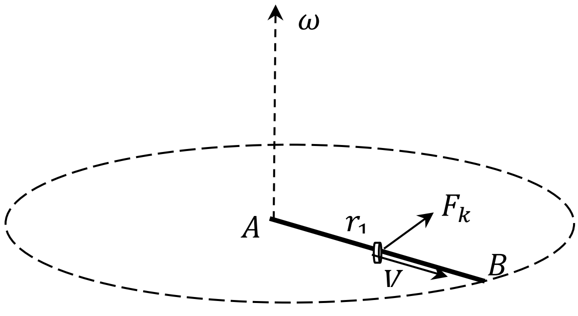
$$F_k = 2mV\omega\sin\varphi = 3.8кН$$

Для того, чтобы результирующая сила инерции была равна нулю, поезд должен двигаться таким образом, что направление силы Кориолиса оказывается противоположным направлению центробежной силы инерции. Следовательно (рис.2), поезд движется по параллели с востока на запад. При этом $F_k = F_{цб}$.

$$F_k = 2mV\omega; \;\; F_{цб} = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\varphi$$

$$V = \frac{\omega R}{2}\cos\varphi = 420\,{}^{км}/_{ч}$$

Задача 4.



$$\overrightarrow{F_k} = 2m[\vec{V}, \vec{\omega}]$$
$$F_k = 2mV\omega$$

Скорость муфточки на расстоянии $r_1$ определим из условия, что изменение её кинетической энергии в системе отсчёта, связанной со стержнем, происходит за счёт работы центробежной силы инерции (сила Кориолиса работы не совершает).

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_0^{r_1} \overrightarrow{F_{цб}} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_0^{r_1} m\omega^2 r dr$$
$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \frac{m\omega^2 r_1^2}{2}$$
$$V = \sqrt{V_0^2 + \omega^2 r_1^2}$$
$$F_k = 2m\omega\sqrt{V_0^2 + \omega^2 r_1^2}$$
$$F_k = 2m\omega^2 r\sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{\omega r}\right)^2} = 2.8H$$

**Тема 7. Специальная теория относительности.**

1. Сформулировать постулаты специальной теории относительности.
2. Записать преобразования Лоренца. В чём состоит лоренцево сокращение длины и эффект замедления времени?
3. Что такое пространство Минковского? Какая физическая величина называется интервалом? Показать, что интервал является инвариантом.
4. Что такое релятивистская масса; релятивистский импульс?
5. Сформулировать закон взаимосвязи массы и энергии. Что такое масса покоя, энергия покоя?
6. Показать, что $E^2 - p^2C^2$ является инвариантом.

Задача 1.

Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $\Delta t_0 = 10$нс. Какой путь пролетит эта частица до распада в лабораторной системе отсчёта, где её время жизни $\Delta t = 20$нс?

Задача 2.

Стержень движется вдоль линейки с некоторой постоянной скоростью. Если зафиксировать положение обоих концов данного стержня одновременно в системе отсчёта, связанной с линейкой, то разность отсчётов по линейке $\Delta x_1 = 4.0$м.
Если же положение обоих концов зафиксировать одновременно в системе отсчёта, связанной со стержнем, то разность отсчётов по этой же линейке $\Delta x_2 = 9.0$м. Найти собственную длину стержня и его скорость относительно линейки.

Задача 3.

Сколько энергии (в расчёте на единицу массы) необходимо затратить, чтобы сообщить первоначально покоящемуся космическому кораблю скорость $V = 0{,}980C$? Сопротивления нет.

Задача 4.

Фотон с энергией $\varepsilon$ испытал рассеяние на свободном электроне. Найти энергию $\varepsilon'$ рассеянного фотона, если угол между направлениями движения рассеянного и налетающего фотонов равен $\theta$.

**Ключи:**

Задача 1.

Предположим, что $K'$система связана с частицей и движется вместе с ней со скоростью $V$ относительно лабораторной $K$ системы. Тогда

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{C}\right)^2}} \quad \Rightarrow$$

$$1-\left(\frac{V}{C}\right)^2 = \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2 \Rightarrow$$

$$V = C\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}\ .$$

Таким образом, путь $l$, пройденный частицей в лабораторной системе отсчёта за время $\Delta t$

$$l = \Delta t C\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}.$$

Второй способ основан на инвариантности интервала:

$$S_{12}{}^2 = C^2 t_{12}{}^2 - l_{12}{}^2 = const,$$

где $t_{12}$ – промежуток времени между событиями, а $l_{12}$ – расстояние между точками, в которых произошли события. В данном случае: событие 1 – зарождение частицы; событие 2 – распад частицы.

В $K'$ системе

$$S'_{12}{}^2 = C^2(\Delta t_0)^2,$$

а в $K$ системе:

$$S_{12}{}^2 = C^2(\Delta t)^2 - l^2 \ \Rightarrow$$

$$C^2(\Delta t)^2 - l^2 = C^2(\Delta t_0)^2$$

$$l = \Delta t C\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}.$$

Задача 2.

Прежде всего, необходимо определить, что в данном случае является событием и, соответственно, определить координаты и моменты времени, когда оно произошло в той и другой системе отсчёта.

Система отсчёта $K$ связана с линейкой, система отсчёта $K'$ связана со стержнем и движется относительно системы $K$ со скоростью движения стержня $V$.

Событие 1- конец стержня с координатой $x'_2$ совпадает с меткой на линейке с координатой $x_2$. $A_1(x_2, t_1)$; $A'_1(x'_2, t'_1)$

Событие 2- конец стержня с координатой $x'_1$ совпадает с меткой на линейке с координатой $x_1$. $A_2(x_1, t_2)$; $A'_2(x'_1, t'_2)$

Поскольку в первом случае разность отсчётов $x_2 - x_1 = \Delta x_1$ зафиксирована в один и тот же момент времени $(t_1 = t_2)$ удобно воспользоваться преобразованиями Лоренца при переходе из системы $K$ в $K'$:

$$x'_2 = \frac{x_2 - Vt_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}; \quad x'_1 = \frac{x_1 - Vt_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \Rightarrow x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

Таким образом, для собственной длины стержня получаем:

$$l_0 = \frac{\Delta x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}. \quad (1)$$

Во втором случае, поскольку $t_1' = t_2'$ , запишем:

$$x_2 = \frac{x_2' + Vt_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}; \quad x_1 = \frac{x_1' + Vt_2'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \Rightarrow x_2 - \ x_1 = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} = \frac{l_0}{\Delta x_2} \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) даёт выражение для собственной длины стержня:

$$l_0 = \sqrt{\Delta x_1 \Delta x_2} = 6{,}0 \text{м}$$

Зная $l_0$, из уравнения (2) находим скорость движения стержня:

$$V = C\sqrt{1-\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}} = 2{,}2 \cdot 10^8 \, {}^{\text{м}}/{}_{\text{с}}$$

Задача 3.

Так как корабль первоначально покоился, ему необходимо сообщить энергию, равную его кинетической энергии с заданной скоростью. При этом масса покоя считается равной единице.

$$T = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}c^2 - m_0c^2$$

$$\Delta E = \frac{T}{m_0} = c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} - 1\right)$$

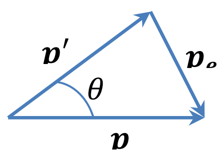
$$\Delta E = 3{,}3 \cdot 10^{17} \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$$

Задача 4.

$$\varepsilon + m_{0e}c^2 = (m_{0e}c^2 + T_e) + \varepsilon'$$

$$T_e = \varepsilon - \varepsilon'$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_e} + \boldsymbol{p'}$$




Согласно теореме косинусов:

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta$$

$$p_e = \sqrt{T_e(T_e + 2m_{0e}c^2)} = \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon')(\varepsilon - \varepsilon' + 2m_{0e}c^2)}$$

Поскольку скорость фотона $V = c$

$$p = \frac{\varepsilon}{c^2}c \Rightarrow$$

$$p = \frac{\varepsilon}{c}$$

$$p' = \frac{\varepsilon'}{c}$$

Таким образом:

$$(\varepsilon - \varepsilon')(\varepsilon - \varepsilon' + 2m_{0e}c^2) = \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon'}{c}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon\varepsilon'}{c^2}\cos\theta$$

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + 2(\varepsilon/_{m_{0e}c^2})(\sin\theta/_2)^2}$$

**Тема 8. Колебания.**

1. Что такое гармонические колебания?
2. Какие колебания называются собственными; чему равна частота собственных колебаний?
3. Записать уравнение движения, решением которого являются затухающие (свободные) колебания; чему равна частота затухающих колебаний?
4. Что такое время затухания (релаксации), коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания, добротность колебательной системы; как они связаны между собой?
5. Каким образом гармонические колебания представляются методом векторной диаграммы? Сложение колебаний методом векторной диаграммы.
6. Комплексное представление колебаний.
7. Записать уравнение движения, установившимся решением которого являются вынужденные колебания. Чему равна частота вынужденных колебаний?
8. В чём заключается явление резонанса? Записать выражение для резонансной частоты.

Задача 1.

Частица массы $m$ находится в одномерном силовом поле, где её потенциальная энергия зависит от координаты $x$ как $U(x) = U_0(1 - \cos ax)$, где $U_0$ и $a$ – постоянные. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

Задача 2.

Неподвижное тело, подвешенное на пружине, увеличивает её длину на $\Delta l = 70$мм. Считая массу пружины пренебрежимо малой, найти период малых вертикальных колебаний тела.

Задача 3.

К невесомой пружине подвесили грузик и она растянулась на $\Delta x = 9.8$ см. С каким периодом будет колебаться грузик, если ему дать небольшой толчок в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания $\lambda = 3.1$.

Задача 4.

Амплитуды смещения вынужденных гармонических колебаний при частотах $\omega_1 = 400\text{с}^{-1}$ и $\omega_2 = 600\text{с}^{-1}$ равны между собой. Найти частоту $\omega$, при которой амплитуда смещения максимальна.

**Ключи:**

Задача 1.

$$F = -\frac{dU}{dx} = -U_0 a \sin ax$$

Для малых $x$

$$\sin ax \cong ax \Rightarrow$$

$$F = -U_0 a^2 x$$

Таким образом, можно записать уравнение движения частицы

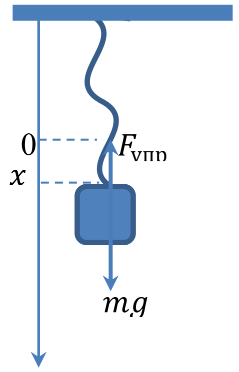
$$m\ddot{x} = -U_0 a^2 x$$

$$\ddot{x} + \frac{U_0 a^2}{m} x = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U_0 a^2}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U_0 a^2}}.$$

Задача 2.




Пусть $x$ – удлинение пружины относительно нерастянутого состояния, когда $x = 0$.
Запишем уравнение движения центра масс грузика под действием силы тяжести и силы упругости пружины:

$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

Значение силы тяжести можно определить из условия равновесия:

$$k\Delta l = mg. \quad (1)$$

Таим образом, уравнение движение принимает вид:

$$m\ddot{x} = -kx + k\Delta l = -k(x - \Delta l)$$

Введём новую переменную $X = x - \Delta l$, то есть будем рассматривать движение грузика относительно его статического положения, когда сила тяжести уравновешена силой упругости пружины ($X = 0$, когда $x = \Delta l$):

$$m\ddot{X} = -kX$$

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0$$

Мы получили дифференциальное уравнение, решением которого являются гармонические колебания с собственной частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Коэффициент упругости пружины находим из уравнения (1)

$$k = \frac{mg}{\Delta l} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} \Rightarrow$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$$

Задача 3.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$k\Delta x = mg$$

$$\frac{k}{m} = \frac{\Delta x}{g} = \omega_0^2$$

$$\lambda = \beta T \ \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\lambda\omega}{2\pi}\right)^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2}}$$

$$T = \sqrt{(4\pi^2 + \lambda^2)\,{}^{\Delta x}\!/_{g}} = 0.7c$$

Задача 4.

Амплитуда вынужденных колебаний изменяется в зависимости от частоты вынуждающей силы по закону:

$$\mathrm{A}(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2}}$$

где $F_0 -$ амплитуда вынуждающей силы; $m -$ масса осциллятора; $\omega_0 -$ собственная частота колебаний; $\beta -$ коэффициент затухания.

Амплитуда достигает максимального значения при резонансе, когда частота вынуждающей силы равна резонансной частоте:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

Выразим коэффициент затухания из условия  равенства амплитуд при заданных частотах вынужденных колебаний:

$$\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\beta^2\omega_2^2}};$$

$$(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\beta^2\omega_2^2 = (\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2\omega_1^2;$$

$$-2\omega_0^2\omega_2^2 + \omega_2^4 + 4\beta^2\omega_2^2 = -2\omega_0^2\omega_1^2 + \omega_1^4 + 4\beta^2\omega_1^2 \Rightarrow$$

$$\beta^2 = \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{4};$$

Подставив выражение для коэффициента затухания в формулу для резонансной частоты, получим:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} = 5.1 \cdot 10^2\text{с}^{-1}$$

**Тема 9. Волны.**

1. Какие процессы называются волновыми? Что такое длина волны, волновая поверхность, фронт волны?
2. Записать уравнения плоской и сферической упругих волн; что такое волновой вектор?
3. Волновое уравнение; границы его применимости.
4. Энергия, переносимая упругой волной; вектор Умова.
5. Стоячие упругие волны; условия их образования.

Задача 1.

Найти волновой вектор $\vec{k}$ и скорость V волны, имеющей вид

$$\xi = a\cos(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z).$$

Задача 2.

Точечный изотропный источник испускает звуковые колебания с частотой $\mathcal{V}$. На расстоянии $r_0$ от источника амплитуда смещения частиц среды равна $a_0$ , а в точке А, находящейся на расстоянии $r$ от источника, амплитуда смещения в $\eta$ раз меньше $a_0$. Найти:

*a)* коэффициент затухания волны $\gamma$;

*b)* амплитуду колебаний скорости частиц среды в точке А.

Задача 3.

За сколько времени звуковые колебания пройдут расстояние между точками 1 и 2, если температура воздуха между ними меняется линейно от $T_1$ до $T_2$. Скорость звука в воздухе $V = \alpha\sqrt{T}$, где $\alpha$ – постоянная.

Задача 4.

Точечный изотропный источник звука находится на перпендикуляре к плоскости кольца, проходящем через его центр О. Расстояние между точкой О и источником $l = 1.0$м, радиус кольца $R = 0.5$м. Найти средний поток энергии через площадь, ограниченную кольцом, если в точке О интенсивность звука $I_0 = 30\,\text{мкВт/м}^2$. Затухание волн пренебрежимо мало.

**Ключи:**

Задача 1.

Уравнение плоской волны

$$\xi = a\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$

По условию задачи уравнение представлено в декартовом базисе. Следовательно:

$$k_x = \alpha;\quad k_y = \beta;\quad k_z = \gamma\ \Rightarrow$$

$$\vec{k} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{\text{к}}\,.$$

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\,;$$

$$k = \frac{\omega}{V} \Rightarrow$$

$$V = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

Задача 2.

Уравнение затухающей сферической волны:

$$\xi = \frac{ae^{-\gamma r}}{r}\sin(\omega t - kr)$$

По условию задачи

$$\frac{ae^{-\gamma r_0}r}{ae^{-\gamma r}r_0} = \eta$$

$$\gamma(r - r_0) = \ln\left(\frac{r_0\eta}{r}\right)\ \Rightarrow$$

$$\gamma = {\ln\left(\frac{r_0\eta}{r}\right)}\Big/{(r - r_0)}$$

$$V = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega a e^{-\gamma r}}{r}\cos(\omega t - kr)$$

$$a?$$

$$a_0 = \frac{ae^{-\gamma r_0}}{r_0} \Rightarrow$$

$$a = \frac{a_0 r_0}{e^{-\gamma r_0}}$$

$$V_{max} = \frac{\omega a_0 r_0 e^{-\gamma r}}{re^{-\gamma r_0}} = \frac{\omega a_0}{\eta}$$

$$V_{max} = \frac{2\pi\mathcal{V}a_0}{\eta}$$

Задача 3.

По условию задачи

$$T = ax + b.$$

Константы $a$ и $b$ находим из граничных условий:

$$x = 0, \qquad T = T_1 \;\Rightarrow$$
$$b = T_1$$

$$x = l, \quad T = T_2 \;\Rightarrow$$
$$a = \frac{T_2 - T_1}{l}$$

Таким образом, получаем уравнение:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1. \quad (1)$$

Продифференцируем уравнение (1) по времени:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_2 - T_1}{l}\frac{dx}{dt} = \frac{T_2 - T_1}{l} V = \frac{T_2 - T_1}{l} \alpha\sqrt{T} \quad (2)$$

Решаем уравнение (2) методом разделения переменных:

$$\frac{l}{(T_2 - T_1)\alpha} \int \frac{dT}{\sqrt{T}} = \int dt \quad \Rightarrow$$

$$\frac{l}{(T_2 - T_1)\alpha} 2\sqrt{T} = t + C.$$

Константу находим из начальных условий:

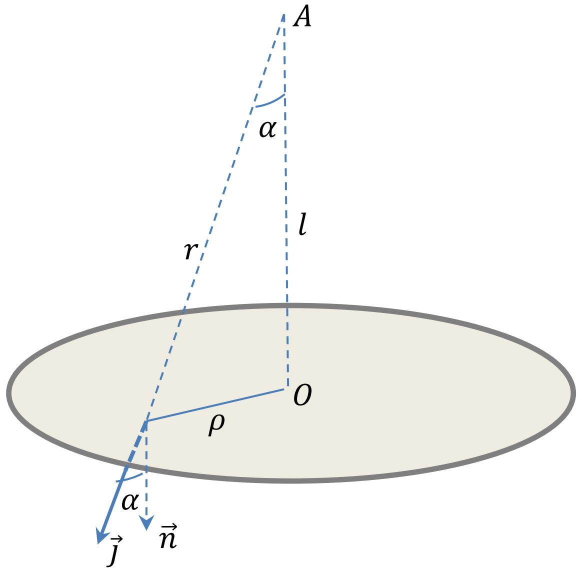
$$t = 0, \;\; T = T_1 \quad \Rightarrow$$
$$C = \frac{l}{(T_2 - T_1)\alpha} 2\sqrt{T_1}.$$

Нам необходимо найти момент времени, когда $T = T_2$.
Следовательно, искомое время

$$\tau = \frac{2l}{(T_2 - T_1)\alpha}\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right);$$

$$\tau = \frac{2l}{\alpha\left(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}\right)}$$

Задача 4.




Поскольку источник точечный и изотропный, направление вектора Умова $\vec{j}$ в произвольной точке плоскости, ограниченной кольцом, определяется радиусом $r$. Следовательно, поток вектора Умова через элемент поверхности $ds$

$$d\Phi = \vec{j} \cdot \overrightarrow{ds} = j \cdot ds \cdot \cos\alpha$$

Таким образом, средний поток энергии через площадь, ограниченную кольцом

$$\langle \Phi \rangle = \int_S \langle j \rangle ds \cos\alpha$$

$$\langle j(r) \rangle = I(r)$$

Для изотропного точечного источника поток энергии через сферу любого радиуса, проведённого из точки, в которой находится источник, равен мощности источника, то есть должен быть постоянным.

$$\langle \Phi \rangle = const \ \Rightarrow 4\pi l^2 I_0 = 4\pi r^2 I(r).$$

Имея в виду, что $r^2 = l^2 + \rho^2$, получим

$$I(\rho) = \frac{l^2}{l^2 + \rho^2} I_0 .$$

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + \rho^2}} \ \Rightarrow$$

$$\langle \Phi \rangle = \int_S I(\rho) ds \cos\alpha$$

$$\langle \Phi \rangle = I_0 l^2 \int_0^R \frac{2\pi\rho d\rho}{l^2 + \rho^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + \rho^2}}$$

Сделаем замену переменных:

$$l^2 + \rho^2 = z \ \Rightarrow$$

$$2\rho d\rho = dz \ \Rightarrow$$

$$\langle \Phi \rangle = I_0 l^2 \pi l \int_{l^2}^{l^2 + R^2} z^{-3/2} dz$$

$$\langle \Phi \rangle = I_0 l^2 2\pi l \left[ \frac{1}{l} - \frac{1}{\sqrt{l^2 + R^2}} \right];$$

$$\langle\Phi\rangle = I_0 2\pi l^2 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/l^2}}\right] = 20\text{мкВт}.$$

По дисциплине «Механика» предусмотрены две контрольные работы: в первой половине семестра по темам 1-5 и в конце семестра по темам 6-9.

Критерии оценивания: результаты контрольной работы определяются оценками «зачтено» и «не зачтено». Оценка «зачтено» выставляется, если студент предъявляет правильные письменные ответы на все контрольные вопросы и решения по одной задаче из каждого раздела. При этом способен для каждой задачи обосновать метод решения, понимает используемые термины и формулы и получил правильный ответ. При невыполнении указанных критериев оценки «зачтено» выставляется оценка «не зачтено».

## 3. Оценочные материалы промежуточной аттестации и критерии оценивания

Экзамен в первом семестре проводится в устной форме по билетам. Билет содержит два вопроса

К экзамену допускаются только студенты, аттестованные по результатам текущего контроля и получившие зачет по дисциплине «Общефизический практикум. Механика».

Первые вопросы билетов проверяют сформированность компетенции ОПК-1 в соответствии с индикатором достижения ИОПК-1.1. Ответы даются в развернутой форме.

Вторые вопросы билетов проверяют сформированность компетенции ПК-1 в соответствии с индикатором достижения ИПК-1.1. Ответы даются в развернутой форме.

Пример экзаменационного билета:

**БИЛЕТ № 1**

Вопрос 1. Кинематика. Пространство, время, масса. Механическое движение. Системы единиц.

Вопрос 2. Второй закон Ньютона и преобразование силы в СТО.

Результаты экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка определяется, исходя из результатов текущей аттестации в течение семестра и согласуется с принятым соответствием с 5-ти балльной шкалой оценивания:– «отлично»; «хорошо»; «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если даны правильные ответы на все теоретические вопросы по билету, а также даны правильные ответы на дополнительные и/или уточняющие вопросы по основным темам и содержанию курса.

Оценка «хорошо» выставляется, если даны неполные правильные ответы на теоретические вопросы по билету, но имеются так же правильные ответы на часть дополнительных и/или уточняющих вопросов по основным темам и содержанию курса.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если даны неправильные ответы на теоретические вопросы, но при этом даны правильные ответы на дополнительные и/или уточняющие вопросы по основным темам и содержанию курса.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если даны неправильные ответы на оба теоретических вопроса билета и отсутствуют ответы на дополнительные или уточняющие вопросы.

## 4. Оценочные материалы для проверки остаточных знаний (сформированности компетенций)

**Тесты:**

**1.** Чему равна мгновенная скорость материальной точки? Выберите правильные варианты ответов:

a) производной радиус-вектора, определяющего положение материальной точки, по времени
b) производной от перемещения материальной точки по времени
c) производной от пути по времени
d) мгновенная скорость – это путь, пройденный материальной точкой в единицу времени.

**2.** Какое из нижеприведенных утверждений справедливо? Тело движется по окружности с постоянной по модулю скоростью, при этом:

a) Равнодействующая сила не равна нулю, постоянна по модулю, меняется по направлению;
b) Равнодействующая сила не равна нулю, постоянна по направлению, меняется по модулю;
c) Величина равнодействующей силы равна нулю;
d) Величина равнодействующей силы не равна нулю, но имеет постоянное направление и численное значение;

**3.** Принцип относительности Галилея утверждает следующее:

a) Все законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета
b) Все механические явления выглядят одинаково во всех инерциальных системах отсчета
c) Все законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета
d) Все физические явления выглядят одинаково во всех инерциальных системах отсчета

**4.** Выделите неправильное утверждение.

a) Импульс системы материальных точек равен геометрической сумме импульсов отдельных точек, входящих в систему
b) Импульс системы материальных точек равен произведению массы системы на скорость движения центра масс этой системы
c) Импульс замкнутой системы материальных точек не меняется со временем
d) Закон сохранения импульса выполняется во всех системах отсчета.

**5.** Какие силы влияют на движение центра масс системы взаимодействующих точек?

a) Внутренние силы
b) Внешние силы
c) Внутренние и внешние силы
d) Внутренние потенциальные силы и внешние силы

**6.** Принцип относительности Эйнштейна утверждает следующее:

a) Все законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.
b) Все механические явления выглядят одинаково во всех инерциальных системах отсчета.
c) Все законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

d) Все физические явления выглядят одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

**7.** Выберите неверное утверждение.

a) В теории относительности длина движущегося стержня короче, чем покоящегося
b) Собственное время всегда меньше, чем время, отсчитанное по часам, движущимся относительно тела
c) Одновременность в релятивистской механике понятие относительное, то есть два события, одновременные в одной инерциальной системе отсчета могут оказаться неодновременными в другой инерциальной системе отсчета
d) Относительность одновременности в специальной теории относительности может привести к нарушению причинно-следственной связи между событиями

**8.** Если материальная точка совершает вынужденные колебания, а вынуждающая сила изменяется по закону $\vec{F} = F_0 \cos \omega t$, то установившиеся вынужденные колебания будут совершаться с частотой, равной

a) Собственной частоте $\omega_0$
b) Частоте вынуждающей силы
c) $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$
d) $\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

**9.** Сплошной и полый цилиндры, имеющие одинаковые массы и радиусы, скатываются без проскальзывания с горки высотой h. У основания горки …

a) Скорости обоих тел будут одинаковы
b) Больше будет скорость полого цилиндра
c) Больше будет скорость сплошного цилиндра
d) Для ответа на вопрос не хватает данных

Ключи:
1.a); 2.a); 3a); 4.d); 5.b); 6.c); 7.d); 8.b); 9.c).

Пример задачи.

В установке (рис.1) массы тел равны $m_0$, $m_1$ и $m_2$, массы блока и нитей пренебрежимо малы и трения в блоке нет. Найти ускорение $a$, с которым опускается тело $m_0$, и силу натяжения нити, связывающей тела $m_1$ и $m_2$, если коэффициент трения равен $k$.

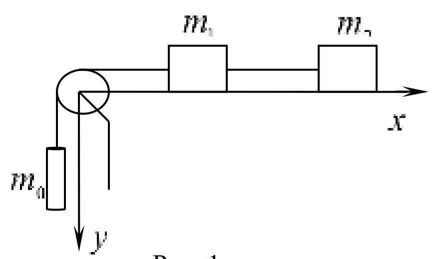


Рис. 1

Ключ:

Расположим систему координат $xoy$ как показано на рисунке. Для каждого из тел запишем уравнение движения центра масс в соответствии с теоремой о движении центра масс системы материальных точек:

$$\vec{F}_{н0} + m_0\vec{g} = m_0\vec{a}_0 \qquad (1)$$

$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{н1} + \vec{F}_{н2} + \vec{F}_{тр1} = m_1\vec{a}_1 \qquad (2)$$

$$m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{н3} + \vec{F}_{тр2} = m_2\vec{a}_2 \qquad (3)$$

Спроектируем уравнения (2), (3) на ось $ox$:

$$-F_{н1} + F_{н2} + F_{тр1} = -ma_1$$

$$-F_{н3} + F_{тр} = -ma_2.$$

Спроектируем уравнение (1) на ось $oy$:

$$m_0 g - F_{н0} = m_0 a_0$$

Для решения полученной системы уравнений необходимым является условие не растяжимости нити:

$$x_2 - x_1 = const$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 \Rightarrow a_1 = a_2$$

$$x_1 + y_0 = const$$

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_0| \Rightarrow a_1 = a_2 = a_0 = a$$

По условию задачи массы блока и нитей пренебрежимо малы, следовательно, если мы выделим элемент нити массой $\Delta m$ между телами $m_1$ и $m_2$ а также между телами $m_1$ и $m_0$ то, согласно второму закону Ньютона, получим

$$F_{н3} - F_{н2} = \Delta m a$$

$$\Delta m \Rightarrow 0$$

$$F_{н3} = F_{н2}$$

$$F_{н0} = F_{н1}.$$

В результате имеем систему уравнений:

$$-F_{н1} + F_{н2} + km_1 g = -m_1 a$$

$$-F_{н2} + km_2 g = -m_2 a$$

$$m_0 g - F_{н1} = m_0 a,$$

Из которой следует:

$$F_{н1} = m_0(g - a)$$

$$-F_{н1} + km_1 g + km_2 g = -a(m_1 + m_2)$$

$$m_0 g - m_0 a - km_1 g - km_2 g = a(m_1 + m_2) \Rightarrow$$

$$a = \frac{(m_0 - km_1 - km_2)g}{m_1 + m_2 + m_0}.$$

$$F_{н2} = m_2 a + km_2 g = \frac{(1+k)m_0 m_2}{m_1 + m_2 + m_0} g$$

**Информация о разработчиках**

Демкин Владимир Петрович, профессор, доктор физико-математических наук, физический факультет Томского государственного университета, зав. кафедрой общей и экспериментальной физики

Федяйнова Нина Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и экспериментальной физики физического факультета ТГУ.