

Приложение 1

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук



Оценочные материалы текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине
(Оценочные средства по дисциплине)

Математическая логика и теория алгоритмов

по направлению подготовки / специальности

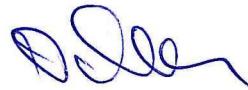
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль) подготовки / специализация:
Анализ безопасности компьютерных систем

ОМ составил(и):
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры общей математики

 Н.Ю. Галанова

Рецензент:
канд. техн. наук, доцент,
зав. кафедрой компьютерной безопасности



С.А. Останин

Оценочные средства одобрены на заседании учебно-методической комиссии института прикладной математики и компьютерных наук (УМК ИПМКН)

Протокол от 08 июня 2023 г. № 02

Председатель УМК ИПМКН,
д-р техн. наук, профессор



С.П. Сущенко

Оценочные средства (ОС) являются элементом оценивания сформированности компетенций у обучающихся в целом или на определенном этапе ее формирования.

ОС разрабатываются в соответствии с рабочей программой (РП).

1. Компетенции и результаты обучения, формируемые в результате освоения дисциплины

Компетенция	Индикатор компетенции	Код и наименование результатов обучения (планируемые результаты обучения, характеризующие этапы формирования компетенций)	Критерии оценивания результатов обучения			
			Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
ОПК-3. Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности	ИОПК-3.1 Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач, формулируемых в рамках базовых математических дисциплин; ИОПК-3.2 Осуществляет применение основных понятий, фактов, концепций, принципов математики и информатики для решения задач профессиональной деятельности ИОПК-3.3 Выявляет научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и применяет соответствующий математический аппарат для их формализации,	ОР-1. Знать язык логики нулевого порядка. Уметь доказывать Эквивалентность формул с помощью таблиц истинности и законов алгебры логики. Уметь применять алгоритмы приведения формулы к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ; проверки формулы на ТИ, ТЛ, алгоритмы проверки логического следования и связанные с ним, в том числе методом резолюций. Знать обоснование полноты метода резолюций, доказательство теоремы компактности. ОР-2. Знать понятия исчисления высказываний (секвенций): аксиомы и правила вывода, вывод. Уметь строить вывод формулы. Анализировать связь между исчислением высказываний и логикой высказываний. Разбираться в проблемах разрешимости, непротиворечивости, полноты и независимости для исчисления высказываний (секвенций). ОР-3. Владеть понятиями логики первого порядка (термы, формулы, интерпретация языка, общезначимость, логическое следование) Владеть	Полностью сформированное умение	В целом успешное, но не систематическое и реализуемое умение, содержащее отдельные пробелы	Частично освоенное умение	Полное отсутствие умения.

	<p>анализа и выработки решения</p> <p>алгоритмами приведения к Скolemовской нормальной форме, алгоритмами доказательства логического следования, доказательства общезначимости и др., в том числе методом резолюций.</p> <p>ОР-4. Иметь представление об исчислении предикатов. Знать примеры теорий первого порядка.</p> <p>ОР-5. Владеть алгоритмами элиминации кванторов в упорядоченном множестве рациональных чисел и др.</p> <p>ОР-6. Владеть понятиями: частично-рекурсивные, примитивно-рекурсивные, общерекурсивные функции. Анализировать и распознавать принадлежность функций к одному из этих типов. Иметь представление об алгоритмической вычислимости, тезисе Черча.</p>			
--	--	--	--	--

2. Этапы формирования компетенций и виды оценочных средств

№	Этапы формирования компетенций (разделы дисциплины)	Код и наименование результатов обучения	Вид оценочного средства (тесты, задания, кейсы, вопросы и др.)
1	Логика нулевого порядка.	ОР-1	СР1. РКС СР2. КНФ, ДНФ, СКНФ, СДНФ СР3. Логическое следование СР4 Метод резолюций ИДЗ Метод резолюций.
2	Исчисление высказываний (секвенций).	ОР-2	СР5. Выводимость
3	Логика первого порядка (логика предикатов).	ОР-3	ДЗ СР6. Предикаты. СР7. ПНФ СР8. Логическое следование. СР9. Метод резолюций. Контрольная работа.
4	Исчисление предикатов.	ОР-4	ДЗ
5	Выразимость. Элиминация кванторов.	ОР-5	ДЗ СР10. Элиминация кванторов.
6	Рекурсивные функции.	ОР-6	ДЗ

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки образовательных результатов обучения

3.1. Типовые задания для проведения текущего контроля успеваемости по дисциплине: СР1. РКС; СР2. КНФ, ДНФ, СКНФ, СДНФ; СР3. Логическое следование; СР4 Метод резолюций; ИДЗ Логика нулевого порядка; СР5. Выводимость; СР6. Предикаты; СР7. ПНФ ; СР8. Логическое следование; СР9. Метод резолюций; СР10. Элиминация кванторов. Контрольная работа «Логика первого порядка».

СР 1. РКС

Задача 11. Упростить схему:

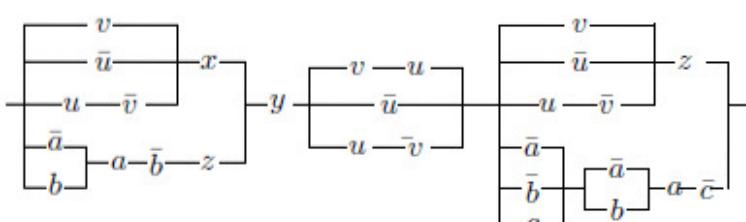


Рис. 1

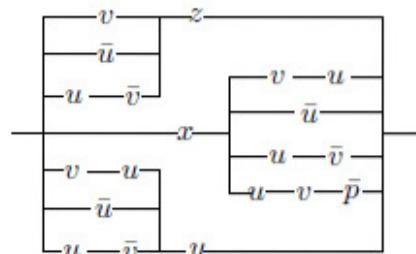


Рис. 2

СР2.+ДЗ КНФ, ДНФ, СКНФ, СДНФ

Задача 5. Найти КНФ и ДНФ формулы пользуясь эквивалентными преобразованиями

- 5.1. $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge (P \rightarrow (P \wedge R))))).$
- 5.2. $((((P \vee Q) \vee R) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))).$
- 5.3. $((Q \rightarrow (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \rightarrow Q)).$
- 5.4. $((P \sim \neg Q) \vee R) \wedge Q.$
- 5.5. $((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow \neg P.$
- 5.6. $(P \wedge \neg Q) \rightarrow (Q \wedge R).$
- 5.7. $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R).$
- 5.8. $((P \wedge \neg Q) \rightarrow Q) \rightarrow R.$
- 5.9. $P \wedge (Q \rightarrow \neg(Q \rightarrow R)).$
- 5.10. $((P \rightarrow R) \rightarrow Q) \wedge (P \wedge Q \rightarrow P).$
- 5.11. $(\neg R \rightarrow Q) \rightarrow (P \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R).$
- 5.12. $((P \wedge \neg R) \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge \neg(P \rightarrow Q)).$
- 5.13. $\neg P \wedge ((Q \vee R) \rightarrow (Q \wedge R)).$
- 5.14. $P \rightarrow ((Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R)).$
- 5.15. $\neg((\neg P \rightarrow (P \wedge \neg R)) \vee (Q \wedge R)).$
- 5.16. $\neg((\neg P \rightarrow (R \wedge P)) \wedge (\neg Q \rightarrow R)).$
- 5.17. $(P \rightarrow \neg(Q \vee P)) \wedge (Q \rightarrow R).$

Задача 7. Записать СДНФ и СКНФ по данной таблице значений функции :

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 7.1. $f(P, Q, R) = [1110\ 1100],$ | 7.12. $f(P, Q, R) = [1101\ 1001],$ |
| 7.2. $f(P, Q, R) = [1000\ 1100],$ | 7.13. $f(P, Q, R) = [1001\ 0100],$ |
| 7.3. $f(P, Q, R) = [0110\ 1101],$ | 7.14. $f(P, Q, R) = [0110\ 1110],$ |
| 7.4. $f(P, Q, R) = [0111\ 1100],$ | 7.15. $f(P, Q, R) = [1001\ 1000],$ |
| 7.5. $f(P, Q, R) = [0001\ 0110],$ | 7.16. $f(P, Q, R) = [1011\ 0110],$ |
| 7.6. $f(P, Q, R) = [0010\ 0101],$ | 7.17. $f(P, Q, R) = [1000\ 1100],$ |
| 7.7. $f(P, Q, R) = [1010\ 1101],$ | 7.18. $f(P, Q, R) = [1101\ 0110],$ |
| 7.8. $f(P, Q, R) = [0010\ 0101],$ | 7.19. $f(P, Q, R) = [0101\ 0001],$ |
| 7.9. $f(P, Q, R) = [0110\ 1101],$ | 7.20. $f(P, Q, R) = [1000\ 1111],$ |
| 7.10. $f(P, Q, R) = [1011\ 1001],$ | 7.21. $f(P, Q, R) = [1011\ 1010],$ |
| 7.11. $f(P, Q, R) = [1001\ 0010],$ | 7.22. $f(P, Q, R) = [1001\ 0100],$ |

Задача 9. Выразить неизвестное высказывание X через P и Q так, чтобы данное высказывание стало тождественно истинным

- 9.1. $(Q \rightarrow X) \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \wedge X)$
- 9.2. $(X \vee (P \wedge \neg Q)) \rightarrow (X \wedge P)$
- 9.3. $(\neg X \rightarrow (P \wedge Q \wedge X)) \rightarrow (X \wedge P \wedge Q)$
- 9.4. $(X \vee P) \rightarrow (X \wedge (Q \rightarrow P))$
- 9.5. $(X \vee (\neg Q \wedge X)) \rightarrow (X \wedge \neg P \wedge Q)$
- 9.6. $(X \vee P) \rightarrow (X \wedge (P \vee Q))$
- 9.7. $((X \wedge \neg P) \vee X) \rightarrow (P \wedge \neg Q \wedge X)$
- 9.8. $(X \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \rightarrow (X \wedge \neg(P \wedge Q))$
- 9.9. $(X \vee P \vee Q) \rightarrow (\neg X \rightarrow (P \wedge X))$
- 9.10. $(X \vee (\neg P \wedge Q)) \rightarrow (X \wedge Q)$
- 9.11. $(X \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \rightarrow (X \wedge (P \rightarrow Q))$
- 9.12. $(X \vee (P \wedge Q)) \rightarrow (X \wedge (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$
- 9.13. $(X \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \rightarrow (X \wedge (Q \rightarrow P))$
- 9.14. $(P \rightarrow (X \vee Q)) \rightarrow (X \wedge (Q \rightarrow (P \rightarrow Q)))$
- 9.15. $(X \vee (P \wedge \neg Q)) \rightarrow (X \wedge \neg Q)$
- 9.16. $(Q \rightarrow (P \vee X))) \rightarrow (((P \wedge Q) \rightarrow P) \wedge X)$

СРЗ+ДЗ. Установить имеет ли место логическое следование с помощью таблицы и с помощью эквивалентных преобразований.

- Если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал.. Значит, Коля ходил в кино.
- Если упростить схему устройства, то его стоимость снизится, а если применить новые элементы, то надежность устройства увеличится. Можно или упростить схему, или применить новые элементы (разделительное или). Однако, если упростить схему, то надежность не увеличивается, а если применить новые элементы, то стоимость не снижается. Значит, надежность увеличивается тогда и только тогда, когда стоимость не уменьшается.
- Если в сети произойдет большой перепад напряжения, то сгорит предохранитель. Если предохранитель сгорит, то необходимо его заменить. Если телевизор включен в сеть, то телевизор работает нормально при условии целостности предохранителя. Если телевизор работает нормально, то я увижу «Новости». Следовательно: я увижу «Новости» при условии целостности предохранителя, отсутствия перепада напряжения в сети и подключения телевизора к сети питания.
- Увеличение денег в обращении влечет за собой инфляцию. Но рост денежной массы происходит по двум причинам: из-за денежной эмиссии или снижения товарооборота. Снижение товарооборота приводит к безработице и спаду производства. Из-за инфляции падает курс денежной единицы. Следовательно: если увеличить денежную эмиссию и поднять производство, тогда избежим безработицы, и курс денежной единицы не упадёт.

СР 4. +ИДЗ Метод резолюций. Логическое следование.

Задача.1.

Установить, какие из следующих логических следствий верны:

- 1.1. $A \vee B \rightarrow C \wedge D, D \vee E \rightarrow F \models A \rightarrow F$
- 1.2. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D), (B \rightarrow E) \wedge (D \rightarrow F), \overline{E \wedge F}, A \rightarrow C \models \overline{A}$
- 1.3. $(A \rightarrow B \wedge C, \overline{B} \vee D, (E \rightarrow \overline{F}) \rightarrow \overline{D}, B \rightarrow A \wedge \overline{E} \models B \rightarrow E$
- 1.4. $A \rightarrow B \wedge C, \overline{B} \rightarrow C, B \rightarrow A \wedge \overline{C} \models C \rightarrow \overline{A}$
- 1.5. $A \rightarrow B \wedge \overline{C}, \overline{B} \rightarrow C \models (C \vee \overline{B}) \rightarrow \overline{A}$
- 1.6. $\overline{B} \rightarrow (A \rightarrow \overline{C}), A \wedge \overline{C} \rightarrow B \models A \rightarrow B$
- 1.7. $B \rightarrow \overline{A} \wedge B, C \rightarrow \overline{D}, \overline{A} \rightarrow \overline{B} \models C \rightarrow \overline{B}$
- 1.8. $\overline{B} \rightarrow \overline{A} \wedge C, \overline{C} \wedge B \rightarrow \overline{A} \models A \rightarrow (B \rightarrow C)$
- 1.9. $B \rightarrow C \vee D, D \rightarrow A, C \rightarrow \overline{B} \models B \rightarrow A$
- 1.10. $A \wedge B \rightarrow C, \overline{A} \wedge B \rightarrow D, \overline{B} \rightarrow E \models C \vee D$
- 1.11. $(B \rightarrow C \wedge D) \rightarrow E, B \rightarrow C, A \wedge B \rightarrow D \models A \rightarrow E$
- 1.12. $A \rightarrow B \wedge C, (B \vee C) \rightarrow D \models A \rightarrow D$
- 1.13. $(A \vee \overline{B}) \rightarrow \overline{D}, \overline{A} \rightarrow (B \wedge D), \overline{D} \rightarrow \overline{A} \models A \rightarrow B$

Задача.2. Найти все логические следствия из следующих посылок (с точностью до ТИ множителя, не являющиеся ТИ и не равные самим посылкам).

2.1. $x^{\textcircled{R}} p, \bar{x}$

2.2. $y^{\textcircled{R}} p, \bar{p}$

2.3. $y^{\textcircled{R}} (x \amalg y), x$

2.4. $y^{\textcircled{R}} (x \amalg y), \bar{x}$

2.5. $(x \amalg y)^{\textcircled{R}} y, x$

2.6. $(x \amalg y)^{\textcircled{R}} y, \bar{x}$

2.7. $(x \amalg y)^{\textcircled{R}} \bar{x}, y$

2.8. $(y \mathbf{b} x), \bar{x}$

2.9. $(x \mathbf{b} y), \bar{y}$

2.10. $x \mathbf{b} y, x^{\textcircled{R}} y$

2.11. $z \mathbf{b} y, z^{\textcircled{R}} \bar{y}$

2.12. $(x \mathbf{b} y)^{\textcircled{R}} \bar{x}, y$

2.13. $(z \mathbf{b} y)^{\textcircled{R}} z, \bar{z}$

Задача.3.

- 3.1. Найти неизвестную функцию $F(x, y)$, зависящую только от переменных x, y , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{x} \nexists p$.
- 3.2. Найти неизвестную функцию $F(x, z)$, зависящую только от переменных x, z , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{x} \nexists p$.
- 3.3. Найти неизвестную функцию $F(x, p)$, зависящую только от переменных x, p , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{x} \nexists p$.
- 3.4. Найти неизвестную функцию $F(y, z)$, зависящую только от переменных y, z , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{x} \nexists p$.
- 3.5. Найти неизвестную функцию $F(y, p)$, зависящую только от переменных y, p , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{x} \nexists p$.
- 3.6. Найти неизвестную функцию $F(z, p)$, зависящую только от переменных z, p , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{x} \nexists p$.
- 3.7. Найти неизвестную функцию $F(x, y)$, зависящую только от переменных x, y , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{y} \nexists p$.
- 3.8. Найти неизвестную функцию $F(x, z)$, зависящую только от переменных x, z , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{y} \nexists p$.
- 3.9. Найти неизвестную функцию $F(x, p)$, зависящую только от переменных x, p , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{y} \nexists p$.
- 3.10. Найти неизвестную функцию $F(y, z)$, зависящую только от переменных y, z , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{y} \nexists p$.
- 3.11. Найти неизвестную функцию $F(y, p)$, зависящую только от переменных y, p , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{y} \nexists p$.
- 3.12. Найти неизвестную функцию $F(z, p)$, зависящую только от переменных z, p , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{y} \nexists p$.
- 3.13. Найти неизвестную функцию $F(x, y, z)$, зависящую только от переменных x, y, z , которая является логическим следствием посылок $x \nexists y, x \nexists z, \bar{x} \circledR p, \bar{y} \nexists p$.

Задача.4. Общая. Найти все формулы от переменных x, y , из которых логически следует формула $G(x, y) = x \ll y$.

СР 5. +ДЗ. Доказать следующие выводимости в дедуктиве Клини.

$ - \alpha \rightarrow \alpha$	Если $\Gamma -\alpha$ то $\Gamma, \alpha -\beta$	$\Gamma, \alpha -\alpha \vee \beta$	$\Gamma, \alpha \wedge \beta -\beta$	Если $\Gamma -\alpha$ и $\alpha -\beta$ то $\Gamma -\beta$
$\Gamma, \alpha -\alpha$	$\Gamma, \bar{\alpha} -\alpha$	$\Gamma, \beta -\alpha \vee \beta$	$\Gamma, \alpha, \beta -\alpha \wedge \beta$	Если $\Gamma, \alpha -\beta$ и $\Gamma -\alpha$ то $\Gamma -\beta$
$(\Gamma -\alpha \text{ и } \Gamma -\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \Gamma -\beta$ теорема дедукции				Если $\Gamma, \alpha -\beta$ и $\Gamma, \alpha -\bar{\beta}$ то $\Gamma -\bar{\alpha}$
Если $ - \alpha \rightarrow \beta$ то $ - \bar{\beta} \rightarrow \bar{\alpha}$		$\Gamma, \alpha, \bar{\alpha} -\beta$		

Если $\Gamma, \alpha -\gamma$ и $\Gamma, \beta -\gamma$ то $\Gamma, \alpha \vee \beta -\gamma$ (правило разбора случаев)	$\alpha -\bar{\alpha}$
Если $\Gamma, \alpha -\beta$ то $\Gamma, \bar{\beta} -\bar{\alpha}$	$ - \alpha \vee \bar{\alpha}$
$\alpha, \beta -\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha, \bar{\beta} -\alpha \rightarrow \beta$

ИДЗ . Методом резолюции доказать теоремы, построить дерево вывода при линейной стратегии

$$1) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$2) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$3) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$4) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$$

$$5) \vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

$$6) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

$$7) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$8) \vdash (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$$

$$9) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$$

$$10) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)))$$

$$11) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$12) \vdash (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

$$13) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow A$$

14) $\vdash \neg A \vee A$.

15) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$.

Задача 14. Доказать выводимость, используя метод резолюций.

- | | |
|--|---|
| 14.1. $\Phi \vdash \Psi \rightarrow (\Phi \wedge \Psi)$. | 14.18. $(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Theta \vdash (X \wedge \Phi) \rightarrow (\Psi \rightarrow (\Theta \vee \neg\Phi))$. |
| 14.2. $\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \rightarrow X \vdash \Phi \rightarrow (\Psi \wedge X)$. | 14.19. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash (\Theta \rightarrow \Phi) \rightarrow (\Theta \wedge \neg\Psi \rightarrow \neg\Phi \vee \Psi)$. |
| 14.3. $\Phi \rightarrow X, \Psi \rightarrow X \vdash (\Phi \vee \Psi) \rightarrow X$. | 14.20. $\Phi \vee \Psi \vdash (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Psi \vee \Theta)$. |
| 14.4. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash (X \rightarrow \Phi) \rightarrow (X \rightarrow \Psi)$. | 14.21. $(\Phi \vee \Psi) \rightarrow \Theta \vdash (\neg\Psi \wedge \Phi) \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta \wedge \Psi)$. |
| 14.5. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash (\Phi \wedge X) \rightarrow (\Psi \wedge X)$. | 14.22. $(\Phi \vee \neg\Psi) \rightarrow (\neg\Theta \wedge \Psi) \vdash (\Theta \vee \Phi) \rightarrow (\Psi \vee \Theta)$. |
| 14.6. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash (\Phi \vee X) \rightarrow (\Psi \vee X)$. | 14.23. $\Phi \wedge \Psi \vdash (\Psi \rightarrow (\Theta \wedge \neg\Psi)) \rightarrow (\Theta \wedge \Psi)$. |
| 14.7. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \rightarrow (\Phi \vee \Psi)$. | 14.24. $(\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta) \vdash \Psi \vee \Theta$. |
| 14.8. $\Phi \vee (\Phi \wedge \Psi) \vdash \Phi$. | 14.25. $\Psi \wedge \Theta \vdash (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta)$. |
| 14.9. $\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge (\neg\Phi \vee \Psi)$. | 14.26. $\neg(\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta \vdash \neg\Phi \vee \neg\Psi$. |
| 14.10. $\Phi \vee (\neg\Phi \wedge \Psi) \vdash (\Phi \vee \Psi)$. | 14.27. $\neg\Phi \vee \neg(\Psi \vee \Theta) \vdash \neg(\Phi \wedge \Psi)$. |
| 14.11. $X \rightarrow \Phi, \Phi \rightarrow \Psi \vdash (X \wedge \Theta) \rightarrow (\Psi \vee \neg\Theta)$. | 14.28. $(\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \neg\Psi) \vdash \Phi \vee \Theta$. |
| 14.12. $\Phi \rightarrow X, \Psi \wedge \Phi \vdash \Theta \rightarrow X$. | 14.29. $\Phi \wedge \Theta \vdash (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \neg\Psi)$. |
| 14.13. $\Theta \rightarrow \Psi, \Theta \wedge \Phi \vdash (\Phi \wedge \Psi) \vee X$. | 14.30. $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta) \vdash (\Phi \rightarrow \neg\Theta) \rightarrow (\Phi \rightarrow \neg\Psi)$. |
| 14.14. $\Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta) \vdash \Psi \wedge (\Phi \vee \neg\Theta)$. | 14.31. $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta) \vdash (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta)$. |
| 14.15. $\Phi \vdash (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \neg\Theta)$. | 14.32. $(\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Theta) \vdash \neg\Phi \vee \Theta$. |
| 14.16. $\Psi \wedge (\Phi \wedge \Theta) \vdash (\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta$. | 14.33. $(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge \neg R) \vdash R \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ |
| 14.17. $\Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) \vdash \Psi \vee (\Phi \vee \neg\Theta)$. | |

СР6. Предикаты;

- 1). Задать область интерпретации M . Задать два предиката $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ от двух переменных на M . Выполнить все операции над предикатами (найти их области истинности).
- 2). Исследовать формулы языка 1 порядка $\$xP(x, y)$, $\$x''yP(x, y)$, $\$x''yP(x, y) \circledR "y\$xP(x, y)$ на выполнимость, опровергимость, общезначимость, противоречивость.

СР7. ПНФ.

- 1). $\$x''yP(x, y) \circledR \$x''yQ(x, y)$
- 2). $\$x''yP(x, y) \circlearrowleft \$x''yQ(x, y)$

СР8.

- 1). Доказать общезначимость

$$\{\$x(P(x) \circledR Q(x))\} \circledR (\{"x(P(x) \circledR \overline{Q(x)})\} \circledR r)$$

- 2). Доказать логическое следование

$$"x(P(x) \circledR Q(x)), "xP(x) \models "xQ(x)$$

$$"x(P(x) \circledR Q(x)), \$x(P(x) \circledR R(x)) \models \$x(Q(x) \circledR R(x))$$

СР9. Доказать методом резолюций

- 1). $\models ([\$xP(x, y) \circledR "yQ(x, y)] \circledR (\{$xP(x, y) \circlearrowleft \$yR(x, y)\} \circledR ("yQ(x, y) \circlearrowleft \$yR(x, y)))$
- 2). $\$x(P(x) \circledR Q(x)), P(t(x_1, \dots, x_n)) \models Q(t(x_1, \dots, x_n))$

- 3) Задать формулу $a(x)$ содержащую кванторы, в которую переменная x имеет свободное вхождение и связанное вхождение, задать терм свободный для x в формуле $a(x)$ и доказать общезначимость формул

$$"xa(x) \circledR a(t); a(t) \circledR \$xa(x).$$

Контрольная работа «Логика первого порядка».

Вариант №1.

1.1. Привести к а) предварённой б) сколемовской нормальной форме формулу:
 $\exists x \forall y ((Q(x, y) \wedge \forall z R(x, y, z)) \rightarrow \forall z \exists x (R(x, y, z) \vee Q(z, x)))$.

1.2. Будет ли формула тождественно истинна, выполнима, опровергима или тождественно ложна:

- а) $\forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$,
- б) $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$

1.3. Записать отрицание данного высказывания в положительной формулировке символами

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} : a_n \leq 0 \wedge f(x) \leq 1.$$

1.4. Доказать методом резолюций общезначимость
 $[\forall x (\exists y P(x, y) \vee Q(y))] \rightarrow [\exists y P(f(x), y) \vee Q(y)]$

1.5. Методом резолюций выяснить будет ли иметь место логическое следование
 $\neg P(x), Q(x) \vee P(x) \models \exists x Q(x)$

1.6. Построить равносильную бескванторную формулу для $\langle \mathbb{Z}, <, =, S, 0 \rangle$
 $\exists x((x = 2) \wedge (x = y + 2) \wedge (y < z))$

3.2. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации по дисциплине
Билеты по курсу Математическая логика и теория алгоритмов. Часть 1.

1	Дать определения: язык нулевого порядка, формула логики высказываний, ранг формулы. Сформулировать законы алгебры логики высказываний, доказать залоги де Моргана. Дать определение СДНФ, СКНФ. Рассказать алгоритмы приведения к СДНФ, СКНФ.	Пусть $\alpha^\sigma = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \sigma = 1 \\ \neg\alpha, & \text{если } \sigma = 0 \end{cases}$ Пусть α формула, все буквы которой содержатся среди букв A_1, A_2, \dots, A_k , и φ некоторая интерпретация. Тогда $A_1^{\varphi(A_1)}, A_2^{\varphi(A_2)}, \dots, A_k^{\varphi(A_k)} \vdash \alpha^{\varphi(\alpha)}$.
2	Дать определения: контрапозитив, элементарная конъюнкция, дизъюнкция, ДНФ, КНФ. Рассказать алгоритм приведения к ДНФ и к КНФ. Доказать критерий тождественной истинности формулы через КНФ (критерий ТЛ через ДНФ).	Доказать, что тавтология является выводимой формулой (в дедуктике Клини).
3	Дать определения: интерпретация языка нулевого порядка, продолжение интерпретации на множество формул логики высказываний. ТИ, ТЛ, выполнимость, эквивалентность на языке интерпретаций. Выполнимое (невыполнимое) множество формул, модель множества формул.	Доказать теорему о семантической полноте дедуктики Клини: для любой формулы α множества формул Γ выполняется $\Gamma \models \alpha \Rightarrow \Gamma \models \neg\neg\alpha$
4	Дать определение: формула α является логическим следствием множества формул Γ $\Gamma \models \alpha$, $\emptyset \models \alpha$. Доказать принцип дедукции: $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \Gamma, \alpha \models \beta$.	Дать определение непротиворечивости исчисления (дедуктики). Доказать, что исчисление высказываний непротиворечиво.

5	Доказать, что следующие утверждения для произвольных формул $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ логики высказываний эквивалентны: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta ; \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \models \beta ;$ $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta ; \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n, \bar{\beta}$ невыполнимо	Доказать семантическую корректность дедуктики Клини.
6	Дать определение: формула α выводима из множества Γ с помощью дедуктики D , вывод формулы α , Дедуктика Клини (Аксиомы 1-10, МР).	Доказать теорему компактности логики высказываний.
7	Доказать, следующие утверждения: для каждой формулы α выполняется $\vdash \neg \alpha \rightarrow \alpha$; каждая аксиома является выводимой формулой; если $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Gamma \vdash \neg \alpha$, то $\Gamma' \vdash \neg \alpha$	Доказать, что любая резольвента двух данных дизъюнктов является их логическим следствием. Дать определение резолютивного вывода. Доказать теорему о семантической корректности метода резолюций.
8	Доказать свойства выводимости: $\Gamma, \alpha \vdash \neg \alpha$ пр-ло повторения посылки; Если $\Gamma \vdash \neg \alpha$, то $\Gamma, \beta \vdash \neg \alpha$ пр-ло введения посылки; Если $\Gamma \vdash \neg \alpha \rightarrow \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ пр-ло удаления импликации	Доказать теорему о полноте метода резолюций (в логике высказываний).
9	Доказать свойства выводимости: $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \neg \alpha \wedge \beta$ пр-ло введения конъюнкции; $\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \neg \alpha$; $\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \neg \beta$ пр-ло удаления конъюнкции; $\Gamma, \alpha \vdash \neg \alpha \vee \beta$; $\Gamma, \beta \vdash \neg \alpha \vee \beta$ пр-ло введения дизъюнкции	Определить операции в трёхзначной логике Лукасевича. Какие законы классической логики не выполняются в логике Лукасевича, доказать.
10	Доказать свойства выводимости: $\Gamma, \overline{\alpha} \vdash \neg \alpha$ удаление отрицания; Если $\Gamma \vdash \neg \alpha$, $\Gamma \vdash \neg \alpha \rightarrow \beta$, то $\Gamma \vdash \beta$ пр-ло МР;	Определить операции в трёхзначной логике Лукасевича. Какие законы классической логики выполняются в логике Лукасевича, доказать законы де Моргана.
11	Доказать теорему дедукции для исчисления высказываний (в дедуктике Клини).	Дать определения: хорновский дизъюнкт, единичный дизъюнкт, позитивный дизъюнкт. Рассказать алгоритм проверки множества хорновских дизъюнктов на выполнимость (от факта).

Билеты по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2.

1.1. Дать определение терма языка 1 порядка.	1.3. Доказать, что интерпретация (алгебраическая система) $\langle \checkmark, =, S, 0 \rangle$ допускает элиминацию кванторов.
1.2. Пусть сигнатура языка содержит целые числа в качестве констант, двуместные функциональные символы + и г ,	

<p>предикатный символ J и пусть x, y – переменные. Какие из следующих выражений будут термами в данной сигнатуре:</p> <p>А) $\exists x (y + 2)$ Б) x В) $x J (y + 2)$ Г) $y + 2$</p>	<p>1.4. Расскажите алгоритм приведения формулы языка 1 порядка к Сколемовской нормальной форме, приведите пример.</p>
<p>2.1. Дать определение сигнатуры языка 1 порядка, формулы языка 1 порядка.</p> <p>2.2. Пусть сигнтура языка содержит целые числа в качестве констант, двуместные функциональные символы $+$ и \cdot, предикатный символ J и пусть x, y – переменные. Какие из следующих выражений будут формулами в данной сигнатуре:</p> <p>А) $\exists x (y + 2)$ Б) x В) $x J (y + 2)$ Г) $\exists x (y + 2) J 0$</p>	<p>2.3. Сформулируйте теорему о подстановке терма, свободного для переменной в формуле. Докажите общезначимость формулы "$\exists x (x) \mathbb{R} a(t)$", где терм t свободен для переменной x в формуле $a(x)$.</p> <p>2.4. Докажите по определению равносильность $\overline{\\$xA(x)} \in "x\overline{A(x)}$</p>
<p>3.1. Дать определение общезначимой (тождественно истинной) формулы языка 1 порядка.</p> <p>3.2. Какие из следующих формул являются общезначимыми для произвольной формулы $A(x)$ с одной свободной переменной для любой сигнтуры</p> <p>А) "$\forall y A(y) \mathbb{R} \\$xA(x)$" Б) $\\$yA(y) \mathbb{R} "xA(x)"$ В) "$\forall y (\overline{A(y)} \overline{\\$A(y)})$" Ответ объясните.</p>	<p>3.3. Дайте определение аксиоматической теории 1 порядка.</p> <p>3.4. Какие вы знаете основные равносильные преобразования формул? Докажите по определению равносильность "$\exists x(A(x) \mathbb{R} B(x)) \in "x(A(x) \mathbb{R} B(x))$"</p>
<p>4.1. Дать определение выполнимой формулы языка 1 порядка.</p> <p>4.2. Какие из следующих формул являются выполнимыми для произвольной формулы $A(x)$ с одной свободной переменной</p> <p>А) "$\exists x(A(x) \mathbb{R} \overline{\\$A(x)})$" Б) $\\$xA(x) \mathbb{R} "\forall y A(y)"$ В) "$\forall y A(y) \mathbb{R} \\$xA(x)$" Ответ объясните.</p>	<p>4.3. Дайте определение вывода формулы из множества формул для аксиоматической теории.</p> <p>4.4. Дать определение общезначимой формулы. Доказать, что из $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ общезначима, следует, что $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n, \neg \beta$ невыполнимо.</p>
<p>5.1. Рассказать алгоритм приведения к Сколемовской нормальной форме формулы</p>	<p>5.3. Рассказать алгоритм элиминации кванторов произвольной формулы</p>

<p>языка 1 порядка.</p> <p>5.2. Доказать, что из $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n, \beta$ невыполнимо, следует, что $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta$</p>	<p>интерпретации (алгебраической системы) $\langle \circ, =, < \rangle$.</p> <p>5.4. Приведите пример элиминации кванторов для $\langle \circ, =, < \rangle$.</p>
<p>6.1. Дать определение истинностное значение формулы $\\$x_1 P(x_1, x_2)$ языка 1 порядка в интерпретации на оценке.</p> <p>6.2. Задан некоторый язык 1 порядка с константами a и b, с одноместными предикатными символами P. Пусть задана интерпретация, с областью интерпретации $M = \{a, b\}$ и интерпретация предикатов: $P(a) = 1, P(b) = 0$. Найдите истинностное значение формулы в данной интерпретации: $\\$x P(x) \rightarrow \\$x P(x)$ будет ли данная формула выполнимой?</p>	<p>6.3. Известно, что формула "$x a(x)$ общезначима. Будет ли общезначимой формула $a(x)$. Докажите.</p> <p>6.4. Дать определение (записать в символьической форме), что значит, формула является логическим следствием множества формул языка 1 порядка. Доказать, что из $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta$ следует $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \models \beta$.</p>
<p>7.1. Дайте определение истинностного значения формулы "$x_1 P(x_1, x_2)$ языка 1 порядка в интерпретации на оценке.</p> <p>7.2. Пусть задан некоторый язык 1 порядка с константами a и b, с одноместными предикатными символами P и Q. Пусть задана интерпретация, с областью интерпретации $M = \{a, b\}$ и интерпретация предикатов: $P(a) = 1, P(b) = 1, Q(a) = 1, Q(b) = 0$. Найдите истинностное значение формулы в данной интерпретации: $\\$x \\$y (P(x) \rightarrow Q(y))$</p>	<p>7.3. Какая аксиоматическая теория называется исчислением предикатов? Сформулируйте теорему Гёделя о полноте для исчисления предикатов.</p> <p>7.4. Дать определение (записать в символьической форме), что значит множество формул является выполнимым, невыполнимым. Доказать, что из $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \models \beta$ следует, что множество формул $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n, \bar{\beta}$ невыполнимо.</p>
<p>8.1. Дайте определение: значение терма t в интерпретации на оценке.</p> <p>8.2. Что значит терм свободен в формуле для переменной ? Будет ли терм $t = f(x, y)$ свободен для переменной z в формулах $\forall y P(z, y) \rightarrow P(x, z)$ $\forall y P(x, y) \rightarrow P(x, z)$ $\forall z \exists y P(z, y) \rightarrow P(x, z)$</p>	<p>8.3. Дать определение общезначимой формулы. Доказать, что из $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n, \bar{\beta}$ невыполнимо следует, что $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ общезначима.</p> <p>8.4. Рассказать алгоритм доказательства общезначимости методом резолюций.</p>
<p>9.1. Дайте определение: истинностное значение формулы в интерпретации на оценке.</p>	<p>9.3. Рассказать алгоритм доказательства логического следования методом</p>

<p>9.2. Будет ли формула $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$ общезначимой? Докажите.</p>	<p>резолюций.</p> <p>9.4. Приведите пример доказательства логического следования методом резолюций.</p>
<p>10.1. Дать определение эквивалентных (равносильных) формул языка 1 порядка.</p> <p>10.2. Какие из следующих формул не являются равносильными</p> $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$ $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ $\forall x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \forall x P(x, y)$ <p>Докажите.</p>	<p>10.3. Дать определение пренексной (предварённой) нормальной формы формулы языка 1 порядка.</p> <p>10.4. Рассказать алгоритм доказательства общезначимости методом резолюций.</p>
<p>11.1. Дать определение опровергимой формулы языка 1 порядка.</p> <p>11.2. Задан некоторый язык 1 порядка с константами a и b, с одноместными предикатными символами P и Q. Пусть задана интерпретация, с областью интерпретации $M = \{a, b\}$ и интерпретация предикатов:</p> $P(a) = 1, P(b) = 1, Q(a) = 1, Q(b) = 0.$ <p>Найдите истинностное значение формулы в данной интерпретации:</p> <p>"$x(P(x) \wedge Q(x))$". Будет ли формула опровергимой?</p>	<p>11.3. Рассказать алгоритм элиминации кванторов произвольной формулы интерпретации (алгебраической системы) $\langle \mathcal{Y}, =, <, S \rangle$. Приведите пример.</p> <p>11.4. Докажите по определению равносильность $\overline{x A(x)} \in \\$x \overline{A(x)}$</p>

Список определений.

1. Предикат задан на множестве. Операции над предикатами.
2. Сигнатура, терм, формула языка первого порядка. Атомарная (элементарная) формула. Язык 1 порядка. Булева комбинация атомарных формул.
3. Свободная переменная, связанная переменная. Замкнутая формула. \exists - замыкание формулы. \forall - замыкание формулы.
4. Интерпретация языка 1 порядка.
5. Оценка в интерпретации.
6. Значение терма в интерпретации на оценке.
7. Истинностное значение формулы в интерпретации на оценке.
8. Формула выполнимая в интерпретации, формула выполнимая, формула опровергимая в интерпретации, формула опровергимая.
9. Формула общезначимая (тождественно истинная), формула противоречивая (тождественно ложная).
10. Равносильные (эквивалентные) формулы языка 1 порядка.
11. Пренексная (предваренная) нормальная форма формулы языка 1 порядка.
12. Сколемовская нормальная форма языка 1 порядка.
13. Формула является логическим следствием множества формул (пустого множества).

14. Множество формул языка 1 порядка является выполнимым (совместным, непротиворечивым), невыполнимым.
15. Терм свободен для переменной в формуле.
16. Литерал. Элементарный дизъюнкт. Унификация переменных дизъюнкта.
17. Говорят, что задана аксиоматическая теория языка 1 порядка.
18. Вывод формулы из множества формул в аксиоматической теории языка 1 порядка.
19. Исчисление предикатов.
20. Интерпретация языка 1 порядка с заданной сигнатурой допускает элиминацию кванторов.

Список алгоритмов

1. Доказательство логического следования методом резолюций.
2. Доказательство общезначимости методом резолюций.
3. Приведение формулы к Сколемовской нормальной форме.
4. Элиминация кванторов для $\langle \exists, =, S, 0 \rangle$.
5. Элиминация кванторов для $\langle \exists, =, <, S \rangle$.
6. Элиминация кванторов для $\langle \forall, =, < \rangle$.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания образовательных результатов обучения

4.1. Методические материалы для оценки текущего контроля успеваемости по дисциплине.

Работа у доски оценивается в 1 балл.

Самостоятельные работы оцениваются по 1 баллу за каждую задачу.

Контрольная работа оценивается максимум в 16 баллов.

ИДЗ оценивается по 1 баллу за каждую задачу.

Общее ДЗ оценивается в 1 балл.

За практику Часть 1 ставится оценка в зависимости от набранных баллов. 16-21 балл - оценка 3, 22-27 баллов - оценка 4, 28-36 баллов - оценка 5

За практику Часть 2 ставится оценка в зависимости от набранных баллов. 16-21 балл - оценка 3, 22-27 баллов - оценка 4, 28-36 баллов оценка 5

4.2. Методические материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине.

Теоретическая Часть 1. оценивается по 5 бальной системе в зависимости от полноты ответа на основные вопросы, при спорной оценке задаётся дополнительный вопрос.

Теоретическая Часть 2. оценивается по 5 бальной системе в зависимости от полноты ответа на основные вопросы, при спорной оценке задаётся дополнительный вопрос.

Итоговая оценка выставляется как целая часть среднего арифметического всех оценок за практику и теорию.